

E. CATALAN

Note sur la sommation de certaines séries

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 15
(1856), p. 293-295

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1856_1_15__293_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1856, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

NOTE SUR LA SOMMATION DE CERTAINES SÉRIES;

PAR E. CATALAN

Soit $F(n)$ une fonction entière de n égale au produit de *quelques-uns* des p facteurs $n, n+1, n+2, n+3, \dots, (n+p-1)$. Soit $f(n)$ une autre fonction entière de n , première par rapport à $F(n)$, et dont le degré soit de *deux* unités au moins inférieur au degré de $F(n)$ (*). Une remarque fort simple, et qui à raison même de sa simplicité n'avait peut-être pas été faite, permet de sommer très-aisément la série dont le terme général est

$$u_n = \frac{f(n)}{F(n)}.$$

Pour le faire voir, prenons un cas particulier, et, par exemple,

$$u_n = \frac{n^2 - 3n + 7}{n(n+1)(n+3)(n+4)}.$$

(*) Sans cette dernière condition la série ne serait pas convergente.

Au lieu de décomposer, par la méthode connue, u_n en fractions ayant pour dénominateur les facteurs $n, n+1, n+3, n+4$, posons

$$\frac{n^2 - 3n + 7}{n(n+1)(n+3)(n+4)} = \frac{A}{n(n+1)} + \frac{B}{(n+1)(n+2)} + \frac{C}{(n+2)(n+3)} + \frac{D}{(n+3)(n+4)},$$

A, B, C, D étant des constantes.

Pour les déterminer, chassons les dénominateurs et faisons, successivement,

$$n = 0, \quad n = -1, \quad n = -2, \quad n = -3.$$

Nous trouverons

$$(1) \quad \begin{cases} 14 = 24A, \\ 11 = 6A - 6B, \\ 0 = -4B + 4C, \\ -25 = 6C - 6D; \end{cases}$$

puis

$$(3) \quad A = \frac{7}{12}, \quad B = -\frac{5}{4}, \quad C = -\frac{5}{4}, \quad D = \frac{35}{12} \quad (*)$$

Soit actuellement

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n;$$

c'est-à-dire

$$S_n = A \sum_1^n \frac{1}{n(n+1)} + B \sum_1^n \frac{1}{(n+1)(n+2)} + C \sum_1^n \frac{1}{(n+2)(n+3)} + D \sum_1^n \frac{1}{(n+3)(n+4)}$$

(*) Sans qu'il soit nécessaire d'insister sur ce point, on voit bien, d'après la manière dont les inconnues A, B, C, D s'enchaînent dans les équations (1), que, dans tous les cas, la décomposition essayée sera possible, et possible d'une seule manière.

ou

$$(3) \quad \begin{cases} S_n = A \sum_1^n \frac{1}{n(n+1)} + B \sum_2^n \frac{1}{n(n+1)} \\ + C \sum_3^n \frac{1}{n(n+1)} + D \sum_4^n \frac{1}{n(n+1)}. \end{cases}$$

Mais (et c'est là la remarque à laquelle nous faisons allusion en commençant)

$$\begin{aligned} \sum_1^n \frac{1}{n(n+1)} &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots \\ &+ \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}; \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} S_n &= A \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + B \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1}\right) + C \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &+ D \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n+1}\right), \end{aligned}$$

ou

$$(4) \quad S_n = A + \frac{1}{2} B + \frac{1}{3} C + \frac{1}{4} D - (A + B + C + D) \frac{1}{n+1}.$$

Par suite,

$$(5) \quad \lim S_n = A + \frac{1}{2} B + \frac{1}{3} C + \frac{1}{4} D.$$

En remplaçant les coefficients par leurs valeurs, on trouve

$$S_n = \frac{13}{48} - \frac{1}{n+1},$$

et

$$\lim S_n = \frac{13}{48}.$$
