

DEVAUX

Solution de la question 323

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 15
(1856), p. 226-227

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1856_1_15__226_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1856, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOLUTION DE LA QUESTION 323

(voir page 184),

PAR M. DEVAUX,

Élève du lycée Charlemagne (classe de M. Rouche).

Soient C et c les centres, R et r les rayons des deux cercles; T et t les points où la tangente extérieure Nn rencontre les deux côtés de l'angle droit TOt formé par les deux tangentes intérieures; N et n sont les points de contact. L'aire du triangle TOt a pour mesure le produit de l'hypoténuse Tt par la moitié de la perpendiculaire OH abaissée du sommet de l'angle droit. Or le trapèze rectangle $NCcn$ donne pour cette hauteur

$$OH = \frac{Oc \cdot CN + OC \cdot cn}{OC + Oc} = \frac{r}{R+r} R + \frac{r}{R+r} r = \frac{2Rr}{R+r}.$$

D'ailleurs, en ajoutant les relations

$$Tt + tn = R + r + TN, \quad Tt + TN = R + r + tn \quad (*)$$

on obtient, pour la base,

$$Tt = R + r.$$

L'aire du triangle $\frac{1}{2} OH \cdot Tt$ est donc équivalente au rectangle Rr des rayons.

Dans le cas où les tangentes intérieures, au lieu d'être rectangulaires, se coupent dans l'angle 2α , la même méthode donne

$$Rr \cot \alpha$$

(*) Soit I le point où la tangente OT touche le cercle c ; on a

$$Tn = TI = TN + R + r;$$

les tangentes OT , Ot sont inclinées de 45 degrés sur la droite des centres.

pour la mesure de l'aire du triangle correspondant TOt .

La surface du triangle formé par une tangente intérieure et deux tangentes extérieures est donnée par une formule semblable. Soient T' le point symétrique de T par rapport à la ligne des centres, O' le point de concours et $2\alpha'$ l'angle des deux tangentes extérieures. La surface du triangle $T'tO'$ est égale au produit du demi-périmètre par le rayon r du cercle inscrit. Or, en ajoutant les relations

$$O't = O'N - tN, \quad tT' = tN + TN, \quad T'O' = O'N - TN,$$

on trouve pour le demi-périmètre

$$O'N \text{ ou } R \cot \alpha'.$$

L'aire cherchée a donc pour expression

$$Rr \cot \alpha',$$

qui se réduit à Rr lorsque les tangentes extérieures se coupent à angle droit.

L'aire du quadrilatère formé par les quatre tangentes est donc

$$Rr(\cot \alpha' - \cot \alpha) = Rr \frac{\sin(\alpha - \alpha')}{\sin \alpha \sin \alpha'}.$$

Lorsque les deux cercles se touchent extérieurement il faut faire $2\alpha = 180^\circ$.

Note du Rédacteur. M. Richard-P. Oxamendi, de Cuba, démontre que l'aire du triangle TOt est égale au rectangle des perpendiculaires abaissées de T et de t sur la ligne des centres, et ensuite que ce rectangle est égal à celui des rayons par des considérations polaires.