

A. CHEVILLARD

**Note sur les ombres à lumière parallèle
ou projections obliques des polyèdres, sur
leurs projections orthogonales et sur les
changements de plans de projections et
rotations comme méthodes d'enseignement**

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 15
(1856), p. 197-206

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1856_1_15__197_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1856, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

NOTE SUR LES OMBRES A LUMIÈRE PARALLÈLE
ou projections obliques des polyèdres ,
sur leurs projections orthogonales et sur les changements de plans de
projections et rotations comme méthodes d'enseignement ;

PAR A. CHEVILLARD,

Professeur de Mathématiques et de Géométrie descriptive.

1. Depuis plusieurs années, on s'attache, dans les classes de mathématiques, à proposer des problèmes réellement utiles, applications des théories enseignées. Cet excellent usage n'est guère suivi pour la géométrie descriptive que dans les écoles professionnelles. C'est d'autant plus regrettable pour les élèves des Lycées, qu'ils ont des ressources qui manquent aux dessinateurs et aux mécaniciens. On peut s'en prendre avant tout à la plupart des *Éléments* de géométrie descriptive qui ne présentent pas de méthodes suffisamment pratiques. Ainsi le plan y est toujours indiqué par ses deux traces, quand la construction le donne ordinairement par trois points et sans traces possibles. Les solutions des problèmes sur le cylindre, le cône, y exigent les traces de ces surfaces, tandis que dans la pratique, ces surfaces étant le plus souvent de révolution, la connaissance de leurs traces pour les tangences, intersections, etc., devient tout à fait inutile. C'est en suivant depuis longtemps un système entièrement différent que j'ai reconnu, par l'expérience des résultats acquis, combien les idées de M. Olivier sont propres à vulgariser et à faire avancer la géométrie descriptive. On me permettra de revenir tout à l'heure sur

ce sujet qui semble acquérir une nouvelle opportunité.

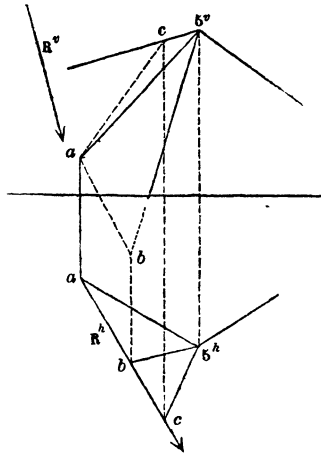
2. Le problème des ombres à lumière parallèle pour les polyèdres pouvant s'aborder dès l'ouverture d'un cours de géométrie descriptive, il sera intéressant pour les commençants d'en faire des applications à l'architecture. Étant donnés par les deux projections orthogonales les sommets 1, 2, 3, 4, 5, etc., d'un polyèdre *convexe* P et le rayon lumineux R, il s'agit d'en dessiner les faces obscures, éclairées et les ombres portées sur les plans de projection. On déterminera d'abord la brisée polygonale B par laquelle le prisme parallèle à R et circonscrit à P touche ce polyèdre, brisée qui est en même temps le contour apparent de P vu dans le sens de R, et aussi ligne séparative des ombres et de la lumière sur ce corps. Pour cela, on projettera parallèlement à R tous les sommets de P, soit sur les deux plans de projection, soit sur l'un d'eux, en ne conservant que la première trace que fournit le rayon lumineux. Cela dépendra de l'effet qu'on voudra rendre. Le polygone *convexe* $2^h 3^h 5^h 6^h$, etc., par exemple, dont les côtés sont projections obliques d'arêtes de P et qui renferme certaines traces $1^h, 4^h$, etc., donne immédiatement la *séparative* 2356, etc., dont deux côtés présenteront peut-être un coude sur les deux plans de projection, et l'on pourra déjà ombrer toute la partie plane comprise dans l'intérieur de $2^h 3^h 5^h \dots 7^h 8^h$, ombre portée et projection oblique de P. Reste à indiquer en projections les ombres propres, c'est-à-dire les faces obscures. Or la connaissance d'une face obscure F suffira pour trouver toutes les autres, car si F n'a aucune arête de la séparative, toutes les faces adjacentes à F par quelque arête seront obscures, et si F tient à la séparative par quelque arête, la face F' qui tient à F par cette arête est éclairée, de sorte qu'on pourra, de proche en proche, re-

connaître toute la partie éclairée de P ; et il sera bien d'indiquer dans l'ombre portée en plein ou par une couleur désignée toutes les arêtes des faces éclairées pour y présenter l'aspect de P vu en projection oblique parallèle à R .

3. Cherchons donc une seule face obscure ou éclairée. Il est rare qu'à vue d'œil on n'en aperçoive pas une, attendu que deux faces successives ont la même manière d'être par rapport à R toutes les fois que leur arête commune n'est pas sur la séparative. D'ailleurs, si une face est horizontale, elle est éclairée ou obscure selon qu'elle est la plus haute ou la plus basse de P , la lumière venant de haut en bas. Si une face est verticale, la projection R^h seule indique si R la rencontre. Remarque analogue sur l'emploi de R^v . Une observation très-commode est que parmi les projections obliques d'arêtes comprises dans l'intérieur de $2^h 3^h 5^h \dots$, on en trouve aisément deux qui se croisent en h , par exemple, mais jamais plus pour h , P étant convexe ; menant par h un rayon en sens contraire de R , ou seulement une seule projection R^h , ce qui n'exige que la pose de l'équerre, sans rien tracer, on verra que R rencontre deux arêtes de P , ni plus, ni moins, dont la première sera entièrement obscure, c'est-à-dire séparera deux faces obscures. Enfin, si l'on ne trouvait pas un point h de cette espèce (cas très-rare), menez près d'un sommet $\bar{5}$ de la séparative et la rencontrant un plan vertical R^h ; il coupera l'angle solide $\bar{5}$ selon un petit polygone très-facile à obtenir en projection verticale. Tout côté de cette projection qui n'est pas rencontré par la direction R^v indique une face obscure. Ainsi soit le sommet séparatif $\bar{5}$ (fig. 1), l'arête séparative $\bar{5}a$; le plan R^h coupe les arêtes $\bar{5}a$, $\bar{5}b$, $\bar{5}c$ aux points a , b , c , ce qui donne les droites ac et ab comprises dans les faces $\bar{5}ac$ et $\bar{5}ab$ adjacentes à la séparative. Comme R^v ne rencontre pas ab , la face $\bar{5}ab$ est obscure, $\bar{5}ac$ est éclairée. Ainsi, en résumé, pas ou très-

peu de constructions à faire pour déterminer les faces obscures de P.

FIG 1.



4. Les faces obscures, c'est-à-dire invisibles dans la direction R, sont déjà indiquées dans l'ombre portée par leurs arêtes ponctuées ou d'une couleur peu tranchée; mais sur les projections il faut teinter ces faces obscures lorsqu'elles y sont visibles. Les faces visibles en projection horizontale étant les faces éclairées par une lumière verticale, on les reconnaît tout de suite par la méthode précédente (n° 3), puisque la projection P^h donne la séparative pour la lumière verticale et que le plan R^h devient ici un plan vertical de direction quelconque. D'ailleurs le croisement de deux projections horizontales d'arêtes résout tout de suite la question. Même observation pour les faces visibles en projection verticale. Ainsi l'on se procure aisément trois aspects du solide éclairés par la même direction de lumière.

5. Quand le polyèdre n'est pas convexe, qu'il présente

des angles solides ou des dièdres rentrants, comme dans un escalier droit, la séparative pourra être projetée obliquement en partie sur le plan horizontal, en partie sur des faces de ces dièdres, et, par suite, être discontinue dans l'espace, parce que R raserait à la fois deux arêtes appartenant à deux faces d'un dièdre ou même à deux dièdres séparés, et viendrait ensuite rencontrer le sol. Certaines arêtes peuvent alors être obscures dans une partie, éclairées dans l'autre. En étudiant séparément les portions convexes du polyèdre, on aura lieu d'appliquer les principes précédents. On peut proposer, dans ce genre, des sujets intéressants; mais je doute qu'un professeur qui ne fait jamais de croquis, voie tout de suite les fautes des dessins présentés, indique une direction meilleure du rayon lumineux, etc (*).

6. Enfin, on peut avoir des groupes de polyèdres qui se pénètrent ou non. Il faudra déterminer leurs intersections (*Géométrie descriptive* de M. Amiot), déterminer la séparative pour chacun d'eux. Les ombres pourront se porter les unes sur les autres *sans croître d'intensité*, de façon que les ombres des corps les plus près du plan horizontal par rapport à R sont plus noires et traversent en restant sensibles les ombres des corps moins rapprochés. Il me paraît difficile d'indiquer des moyens généraux ayant assez de précision pour s'appliquer tout de suite à tous les cas. On remarquera principalement qu'aussitôt qu'une séparative d'un corps porte ombre sur une face éclairée d'un autre corps, cette ombre reste dans cette face éclairée ou continue jusqu'à la rencontre d'une séparative de ce deuxième corps; en ce point le rayon lumineux rasant deux séparatives, il en résulte l'intersection de deux om-

(*) Dans le dessin des machines, les ombres *portées* embrouillent souvent plus qu'elles n'éclaircissent. Elles ne sont utiles que pour accuser la forme des surfaces courbes.

bres portées sur un troisième corps ou sur le plan horizontal, etc.

7. Je terminerai en faisant observer que les projets d'architecture et les dessins topographiques sont éclairés par de la lumière dite à 45 degrés, locution mal comprise de beaucoup de praticiens. Les projections du rayon sont, en effet, inclinées à 45 degrés sur la ligne de terre, mais le rayon lumineux fait avec chaque plan de projection l'angle que fait la diagonale d'un cube avec la diagonale d'une de ses faces qui part du même sommet, angle très-facile à calculer.

8. Le problème des ombres d'un polyèdre pourrait se résoudre par deux changements de plans de projection qui rendraient R perpendiculaire au dernier. Ce moyen sera en général trop compliqué. On en accuserait à tort la transformation des projections. Cette méthode devra toujours être préférée *chaque fois qu'en particularisant les données par rapport aux deux plans de projection, sans rien changer à leur position relative dans l'espace, on trouvera une solution immédiate du problème*, ce qui n'est pas le cas actuel. Faute de bien entendre cette condition, la méthode des changements de plans d'Olivier, si simplement exposée dans l'ouvrage de M. Amiot, soulève encore maintenant de nombreuses critiques. Je vais prouver qu'elles sont toutes tirées de l'ignorance du sujet.

9. L'opposition aux transformations de projections et rotations se résume dans les quatre motifs suivants :

1°. *Ces méthodes sont inutiles, puisqu'on faisait de la Géométrie descriptive avant M. Olivier.*

C'est exactement comme si ayant su autrefois, je suppose, discuter analytiquement les propriétés géométriques des courbes, sans le problème de la transformation des coordonnées, on renonçait à refaire aujourd'hui cette

discussion par le secours de ce problème. Mais ici il y a plus encore. Si l'on voulait se donner la peine d'examiner avant de critiquer, on verrait que les anciennes explications données pour calculer par les projections la distance de deux points, les angles des droites, des plans, etc., deviennent inutiles par l'emploi des changements de plans et rotations, lequel fait d'abord retrouver les constructions usitées et disparaître en même temps tous ces cas particuliers dont plusieurs livres élémentaires sont remplis, parce que ces explications soi-disant générales y devenaient réellement insuffisantes. Dans notre système d'enseignement, le procédé d'exécution étant aussi uniforme que général, il suffit d'énoncer quelques-uns de ces cas pour que les élèves les résolvent immédiatement et de la manière la plus simple.

2°. *Les épures faites par ces méthodes sont compliquées et confuses. On voit un changement de plan, on se perd dans plusieurs.*

Il faut faire attention que la pratique des changements de plans et rotations doit être raisonnée avant toute application, que ses qualités principales sont, au contraire, de permettre de rejeter loin du résultat à obtenir les constructions auxiliaires pour donner à ce résultat toute l'expression désirable, qu'on n'emploie pas indifféremment un changement ou une rotation, qu'il y a des règles très-simples pour rendre visuelles toutes les constructions qui en résultent, qu'il n'y a aucune nécessité de voir l'ensemble des opérations fournies par trois changements (cas très-rare), qu'on n'a jamais besoin de regarder que la dernière ligne de terre, et qu'enfin une règle très-facile évite même la vision dans l'espace en la ramenant par cette vision même à la lecture sur le papier (t. XIII, p. 91).

3°. *Cette règle n'est qu'un mécanisme, et il faut rejeter toutes ces méthodes réduisant l'esprit au rôle de ma-*

chine, parce que, dit-on, leur application n'exige aucun raisonnement.

On oublie précisément de prouver que ces méthodes sont dans ce cas. Est-ce que toutes les règles d'arithmétique, les évaluations géométriques, les formules d'algèbre, des calculs différentiel et intégral, etc., ne sont pas des mécanismes ingénieux dont l'effet est démontré à priori satisfaire au but proposé? Mais d'abord si l'on interdit les changements de plans et les rotations en principe, il n'en faut pas faire d'applications sous un autre nom là où il est impossible de les éviter (surfaces de révolution, construction de pièces d'assemblage, etc.); mais si l'on ne croit en critiquer que l'abus, il est vraiment singulier qu'il existe des méthodes pour résoudre uniformément, de la façon la plus simple, la plus rapide et la plus expressive, tous les problèmes fondamentaux de la géométrie descriptive et que ces méthodes soient des mécanismes sans valeur et sans raison d'être.

4°. Enfin, d'autres personnes objectent que *ces méthodes sont trop analytiques, qu'elles s'éloignent de la géométrie pure, que trouver la position la plus convenable des données par rapport aux plans de projection est une question difficile, etc.*

Le procédé géométrique indépendant de tout moyen d'exécution une fois reconnu par la géométrie élémentaire ou supérieure de l'espace, selon la question, le moyen graphique s'ensuivra en conséquence. Je ne pense pas qu'il faille de grands efforts d'intelligence pour remarquer qu'une droite finie est projetée en vraie grandeur sur un plan auquel elle serait parallèle, qu'un angle dièdre est obtenu en vraie grandeur sur un plan perpendiculaire à son arête, etc., tous résultats qui doivent être prévus, au contraire, par la géométrie pure. Que si la rotation qui doit produire ces positions introduit quelque

confusion dans les données, il faut préférer un changement de plan ; qu'on trouve bien les distances de divers points à un plan par un seul changement de plan, mais qu'une rotation ne conviendrait que dans le cas d'un seul point par lequel on fait passer l'axe, etc. Du reste, ces méthodes ont un caractère mathématique si prononcé, qu'elles suppléent parfaitement, comme je l'ai vérifié bien souvent, des études incomplètes sur divers points de la géométrie pure, en les rendant pour ainsi dire évidents sans démonstration. Aussi sont-elles enseignées de préférence à toutes autres dans les écoles professionnelles de Châlons, d'Angers, de Lyon et pour l'école des Beaux-Arts de Paris. S'agit-il, par exemple, de chercher l'intersection d'une droite et d'un cône de révolution donné de sommet, d'angle et d'axe ? Il faudra, dans le système d'enseignement généralement suivi, faire passer un plan par la droite et le sommet du cône, chercher l'intersection de ce plan avec une trace du cône, laquelle est une courbe du deuxième degré, pour en conclure ensuite la génératrice qui coupera la droite au point cherché. Si l'on ne veut pas construire la courbe par points, il faudra déterminer un foyer et un ou deux sommets ; trouver avec ces seules données la rencontre de la courbe et d'une trace du plan, ce qui, pour le dire en passant, n'est plus de la géométrie élémentaire selon les Programmes.

Du reste, on ne s'inquiète pas si la trace du plan est hors du cadre et la courbe aussi ; si, quand elles y sont, le point auxiliaire est lui-même dans le cadre, parce qu'en définitive ces circonstances étant les plus fréquentes, il faudrait en conclure que la méthode est en général impraticable. Ce que je dis de ce problème, il faut le répéter, sans exception, de tous les problèmes relatifs au cône, au cylindre et aux surfaces de révolution et de tous les problèmes dépendant de la recherche d'un point auxiliaire.

De bonne foi, peut-on comparer cette méthode avec celle qui consiste à projeter la droite et le cône sur un plan parallèle à l'axe du cône pour obtenir tout de suite le point cherché à l'aide d'une section circulaire? c'est-à-dire en résumé à faire deux changements de plans successifs dont le dernier rende le cône vertical. Ces procédés, si bien appliqués par les praticiens qui ont peu de connaissances scientifiques, sont donc ceux qui conviennent aussi le mieux à de plus instruits, et si l'objection 4^o était fondée, cela reviendrait à n'admettre aucun discernement ni appréciation mathématique chez ceux qui doivent le plus en avoir.

Note du Rédacteur. Quand faut-il changer de plans de projections, faire des rabattements, des rotations? Réponse: quand vous le jugerez commode. Quand cela est-il commode? Il n'y a pas de réponse à faire à telle question. Toutes les épures de charpente ne roulant que sur des polyèdres, on y fait continuellement des changements de plans de projections (*), et de tout temps on a fait des épures de charpente. Où est donc la nouveauté de ce système de changements dont on fait tant de bruit? La clarté et la simplicité d'une épure dépendent du discernement de l'opérateur, et il n'y a pas de règle pour donner ce discernement. Au propre comme au figuré, il faut éviter, autant que possible, les changements de plan, user de ce moyen avec économie, et ne s'en servir, style de prospectus, que lorsque le besoin s'en fait sentir.

(*) *Exemple* : L'épure des pannes et tasseaux de l'empanon déversé et delarde