

E. DE JONQUIÈRES

**Démonstration géométrique des théorèmes
de M. Steiner, énoncés sous les n^os 5, 6 et 7**

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 15
(1856), p. 190-196

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1856_1_15__190_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1856, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

DÉMONSTRATION GÉOMÉTRIQUE DES THÉORÈMES DE M. STEINER

Énoncés sous les n^{os} 5, 6 et 7

(voir t. XIV, p. 141 et 142);

PAR M. E. DE JONQUIÈRES.

1. Pour démontrer ces théorèmes, il faut commencer par rappeler quelques propositions préliminaires qui sont une conséquence très-simple de la théorie des *polaires* et du principe de *correspondance anharmonique* récemment exposé par M. Chasles dans les *Comptes rendus* de l'Académie des Sciences.

2. Soient données sur un plan deux coniques Σ, Σ' et une droite arbitraire L . p et p' étant les pôles de cette droite dans les deux coniques, la droite pp' , qui les joint, est unique et déterminée. J'appellerai cette droite la *réciproque* de L .

Par un point quelconque O de L , soient menées des droites $OL', OL'',$ etc.; leurs pôles respectifs $q, q', r, r',$ etc., seront distribués sur les deux polaires du point O .

et ils se *correspondront anharmoniquement* ; donc (*Géométrie supérieure*, n° 555), les droites pp' , qq' , rr' , etc., enveloppent une conique Ω relative au point O .

A un second point quelconque O' correspondra pareillement une seconde conique Ω' relative à ce point.

3. Donc la droite OO' a pour *réci-proque* une des quatre tangentes communes aux deux coniques Ω , Ω' , et cette tangente est déterminée, ainsi que cela résulte d'ailleurs de la première construction des droites réciproques (n° 2), parce que les trois autres tangentes communes E , F , G , dont une au moins est toujours réelle, sont des droites fixes et indépendantes de la position variable de la droite OO' . C'est ce que je vais faire voir dans le paragraphe suivant.

4. En effet, soit E l'une de ces trois tangentes. Si on la regarde comme enveloppant la conique Ω , il résulte du numéro 2 qu'elle joint les deux pôles $o\omega$ d'une certaine droite OM , laquelle passe par le point O dont Ω est la conique relative, ces pôles étant pris par rapport aux deux coniques fixes Σ , Σ' . Donc, réciproquement, les pôles e , e' de E se trouvent sur cette droite OM .

Par une raison semblable, si l'on regarde E comme enveloppant la conique Ω' , ses pôles e , e' doivent se trouver sur une autre droite OM' , distincte de la droite OM , et passant par le point O' dont Ω' est la conique relative.

Cette double condition exige évidemment que les points e , e' coïncident en un seul et même point.

5. Il résulte de là que chacune des trois tangentes E , F , G a même pôle dans les deux coniques proposées Σ , Σ' . Or, on sait que dans le plan de deux coniques données, il n'existe que trois droites fixes qui jouissent de cette propriété remarquable (*voir la Géométrie supérieure et le Traité des propriétés projectives*). On sait en outre que

ce pôle commun est précisément le point d'intersection des deux autres droites ; que ce point est, en même temps, le point de concours de deux cordes communes conjuguées ou *axes de symptose* des deux coniques ; que chacune de ces droites contient deux *centres d'homologie* conjugués, centres que l'on obtient aisément en cherchant les deux points (réels ou imaginaires) qui divisent harmoniquement à la fois les deux segments interceptés par les deux coniques sur celle des trois droites que l'on considère (*Géométrie supérieure*, n° 210). Etc.

6. D'après ce qui précède, les coniques *relatives* à tous les points du plan touchent trois droites fixes de ce plan ; ce sont précisément les trois droites remarquables E, F, G dont je viens de parler.

Réciproquement, toute conique tangente à ces trois droites est relative à un point du plan. Car deux autres tangentes quelconques de cette conique ont pour *réci-proques* deux droites dont le point de rencontre aura pour conique relative une conique tangente à ces deux droites (n° 2) et aux trois tangentes fixes E, F, G et qui se confondra, par conséquent, avec la conique en question.

7. Actuellement, prenons pour conique le segment rectiligne terminé *em* qui joint un point quelconque *m* de E au point de concours *e* des deux droites F, G, segment qu'on peut regarder comme représentant une ellipse infiniment aplatie à laquelle les trois droites E, F, G sont évidemment tangentes (*). Cette conique particulière sera ; comme dans le cas général (n° 6), *relative* à un point *m'*, et je vais prouver que ce point *m'* est situé sur E comme le point *m* lui-même.

En effet, pour que les droites *pp'*, *qq'*, *rr'*, etc. (n° 2),

(*) Voir, à ce sujet, le *nota* qui termine cet article, n° 8.

qui enveloppent et qui déterminent, dans ce cas, la conique relative em , passent toutes par le point m , extrémité du segment terminé em , il faut (comme on sait, et comme je le rappelle expressément dans le *nota* ci-après) que les droites fixes $pqr, p'q'r'$, polaires du point m' , sur lesquelles sont marquées les divisions homographiques p, q, r , etc., p', q', r' , etc., passent par le point p , et, de plus, il faut que ce point soit un point homologue de deux divisions. Donc, en premier lieu, il existe une droite $m'I$ passant par le point m' , telle, que ses deux pôles, par rapport aux coniques données Σ, Σ' , coïncident en un seul et même point au point e . Or j'ai fait voir (n° 5) que la droite E est la seule droite du plan des deux coniques qui jouisse de cette propriété. Donc $m'I$ n'est autre chose que E , ce qui démontre que le point m' est sur E comme le point m lui-même.

Il est d'ailleurs évident que les points m et m' se correspondent anharmoniquement, et, de plus, qu'ils sont en involution. Car le point m , considéré comme appartenant à l'une ou à l'autre des deux divisions, a toujours pour correspondant le même point m' . Les points doubles de l'involution jouissent de la propriété que les deux pôles relatifs à chacune des droites qui passent par l'un d'eux se trouvent sur une droite qui passe aussi par ce point. Donc (*Geométrie supérieure et Traité des propriétés projectives*) ces points doubles sont les centres d'homologie des deux coniques, etc.

8. Je vais maintenant donner, dans le *nota* suivant, les détails auxquels j'ai fait allusion plus haut (n° 7) et qui auraient retardé la marche des raisonnements.

Nota. On sait que quand deux faisceaux homographiques ont leurs sommets en deux points distincts, leurs rayons homologues se coupent généralement sur une conique. Dans le cas particulier où deux de ces rayons coïn-

cident en direction avec la droite qui joint les deux sommets des faisceaux, le point de concours des rayons homologues décrit une droite indéfinie. Mais il est sous-entendu que la droite de jonction des deux sommets fait aussi partie de la conique qui est décrite dans ce cas particulier; chacun de ses points peut effectivement être regardé comme le point d'intersection des deux rayons homologues qui se confondent avec elle. Et il faut bien qu'il en soit ainsi; car la première droite *indéfinie* ne saurait représenter à elle seule une section conique. Et cette conique se réduit, dans ce cas, au système des deux droites dont je viens de parler, système qu'on peut regarder comme une hyperbole infiniment dilatée et réduite à ses asymptotes.

Pareillement, les droites qui joignent les points homologues de deux divisions homographiques tracées sur deux droites distinctes, enveloppent généralement une section conique. Si le point de concours de ces deux droites fixes est un point de coïncidence de deux points homologues, la droite mobile passe par un point fixe ou enveloppe ce point. Mais ce point ne représente pas plus à lui seul la conique du cas général, pas plus, dis-je, qu'une conique n'était représentée par une seule droite dans la première partie du *nota*. En effet, une droite quelconque, menée par le point de concours des deux droites fixes, peut être regardée comme joignant les deux points homologues qui coïncident en ce point, et par conséquent comme une tangente à la conique enveloppe. Donc cette conique est représentée dans ce cas particulier par le segment terminé à ce point de concours et au second point fixe par lequel passent toutes les autres droites mobiles; et on peut la regarder comme une ellipse infiniment aplatie et réduite à son grand axe.

9. Ceci posé, la démonstration des théorèmes de

M. Steiner se fait sans difficulté, comme on va le voir.

10. THÉORÈME V. *Quatre coniques étant inscrites dans un triangle, ces coniques prises deux à deux ont encore en commun, outre les côtés du triangle, une quatrième tangente T; il y a six de ces tangentes T et elles coupent chaque côté du triangle en six points en involution.*

On pourra toujours décrire, ou simplement supposer, sur le plan de la figure, un système de deux coniques Σ , Σ' dont les trois côtés du triangle soient précisément les trois droites remarquables E, F, G dont je viens de parler; ceci est évident. Soient C, C', C'', C''' les quatre coniques données, et c, c', c'', c''' leurs points *réiproques* par rapport aux deux courbes Σ , Σ' . Ces points forment un quadrilatère dont les quatre côtés et les deux diagonales sont les six droites *réiproques* des six tangentes menées aux quatre coniques. Soient a, a', b, b', c, c' les points où ces six tangentes rencontrent l'un E des côtés du triangle, et α , α' , β , β' , γ , γ' les six points d'intersection de E avec les côtés et les diagonales du quadrilatère. Ceux-ci sont en involution (*Géom. sup.* n° 339); donc les six autres a, a', etc., qui leur correspondent anharmoniquement, sont eux-mêmes en involution.

C. Q. F. D.

Cette démonstration indique en même temps de quelle manière on doit conjuguer les six points dans l'involution. Par exemple, si a répond à la tangente commune aux deux coniques C, C', a' répondra à la tangente commune aux deux autres c'', c'''.

11. THÉORÈME. *Si quatre coniques ont en commun un foyer et une tangente A, elles ont encore en commun prises deux à deux six tangentes T telles, qu'elles coupent la tangente A en six points en involution.*

Ce théorème est un simple corollaire du précédent. Car

(*Géom., sup.* n° 736, ou *Traité des propriétés projectives*) des coniques qui ont un foyer commun sont dans le même cas que des coniques qui ont deux tangentes communes.

12. THÉORÈME VII. *Si quatre paraboles ont le même foyer, prises deux à deux, elles ont une tangente commune T; si par un point p on abaisse des perpendiculaires sur ces six tangentes, on a un faisceau en involution.*

Les paraboles ont une tangente commune à l'infini, et le foyer commun tient lieu de deux autres tangentes communes (imaginaires). Donc, en vertu du théorème V, les six points où les six tangentes rencontrent la droite à l'infini sont en involution. Les six perpendiculaires issues du point p faisant avec ces six tangentes des angles égaux, rencontrent la droite à l'infini en six points homographiques aux six premiers (*Géom. sup.*, n° 652), et qui, par suite, seront comme eux en involution. Donc il en est de même des six perpendiculaires.

C. Q. F. D.

Je ferai remarquer, en terminant, que toutes les propositions qui font l'objet de cette Note ont leurs corrélatives qu'on démontrerait directement par des raisonnements analogues. Ces nouvelles propositions qui sont intéressantes, fournissent une interprétation et une démonstration géométriques très-simples des divers théorèmes déduits de l'analyse par M. Magnus, de Berlin, dans le tome VIII du *Journal de Crelle*, p. 51. Je me propose de revenir ailleurs sur ce sujet.
