

Résolution des équations transcendantes (fin)

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 15
(1856), p. 17-22

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1856_1_15__17_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1856, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS TRANSCENDANTES (Fin)

(voir tome XIV, page 394).

3^e Exemple :

$$x - \operatorname{tang} x = 0,$$

équation que l'on rencontre dans la théorie des oscillations des corps élastiques et dans la théorie de la chaleur.

On peut écrire

$$\frac{x \cos x - \sin x}{\cos x} = 0,$$

et démontrer comme ci-dessus que les racines de l'équation

$$\frac{1}{\cos x} = 0$$

n'appartiennent pas à l'équation ; il suffit donc de consi-

dérivé seulement l'équation

$$x \cos x - \sin x = 0.$$

A chaque racine α correspond une racine $-\alpha$; on n'a donc besoin que de chercher les racines positives. La plus petite de ces racines est zéro.

$$f''(x) = -(x \cos x + \sin x),$$

$$f'(x) = -x \sin x,$$

$$f(x) = x \cos x - \sin x,$$

ω étant une très-petite quantité, on obtient

$$f''(x), \quad f'(x), \quad f(x),$$

$$(\omega) \dots - - -$$

$$(90^\circ) \dots - - +$$

il n'y a donc pas de racines entre 0 et 180° , et non plus, évidemment, entre 90 et 180 degrés.

On a

$$(180^\circ + \omega) \dots + + -$$

$$(270^\circ) \dots + + +$$

Il y a donc une racine entre ces limites; en les resserrant, on trouve

$$(4,4) \dots \begin{array}{ccc} + & + & - \\ 2,3, & 4,187, & 0,4006, \end{array}$$

$$(4,5) \dots \begin{array}{ccc} + & + & + \\ 1,92, & 4,398885, & 0,028949. \end{array}$$

(Il faut se rappeler que l'arc dont la longueur est 4,4 [rayon égale 1], contient $252^\circ 6' 5''$, etc.)

$$\frac{2,3}{8,37} = 0,2, \quad k = 0, \quad n = 1,$$

limite extrême égale 4,5.

(19)

$$\frac{0,028}{4,398} = 0,00... \text{ (car } 2n + k = 0 \text{)}$$

1^{re} approximation :

$$4,5 - 0,01 = 4,49, \quad f(4,49) < 0,$$

ainsi la racine est entre 4,49 et 4,5.

4,5 est encore limite extrême :

$$\frac{0,028949}{4,398885} = 0,0065 \quad (4n + k = 4).$$

2^e approximation :

$$4,5 - 0,066 = 4,4934, \quad f(4,4934) < 0,$$

ainsi la racine est entre 4,4934 et 4,4935;

$$\frac{f(4,4935)}{f'(4,4935)} = \frac{0,000396339}{4,38627} = 0,00009035 \quad (8n + k = 8).$$

3^e approximation :

$$4,4935 - 0,00009036 = 4,49340964,$$

exacte jusqu'à $(\frac{1}{10})^8$ près; cette valeur correspond à un arc de $257^{\circ} 27' 12''$, 9268. Euler trouve

$$257^{\circ} 27' 12'' = 4,49340834;$$

Poisson trouve 4,49331, expression déjà fautive à la quatrième décimale, il faut lire probablement 4,49341 (*).

On trouve de la même manière les autres racines qui sont en nombre infini.

4^e Exemple :

$$(4 - 3x^2) \sin x - 4x \cos x = 0.$$

(*) *Mémoires de l'Académie des Sciences*, t. VIII, p. 420.

Poisson donne pour valeur de la seconde racine 7,73747; inexact de la seconde décimale. La vraie valeur est 7,725

Cette équation se présente dans la théorie des oscillations d'une sphère élastique.

A chaque racine positive α correspond une racine négative $-\alpha$. Il suffit de chercher les racines positives.

$$\begin{aligned} f(x) &= (4 - 3x^2) \sin x - 4x \cos x, \\ f'(x) &= -x(3x \cos x + 2 \sin x), \\ f''(x) &= (3x^2 - 2) \sin x - 8x \cos x; \end{aligned}$$

la fonction $f''(x)$ reste toujours négative dans l'intervalle de $x = 0$ à $x = 45^\circ$.

Dans cet intervalle $f(x)$ peut être prise pour fonction déterminante; ω étant un très-petit arc, on obtient

$$\begin{array}{ccccccc} (\omega) & \dots & - & - & - & & \\ (45^\circ) & \dots & - & - & - & & \end{array}$$

il n'y a donc pas de racines entre 0 et 45° degrés.

$f''(x)$ change de signe dans l'intervalle de 45° à 90° degrés; on ne peut donc prendre $f''(x)$ pour fonction déterminante; on pourrait diviser cet intervalle en d'autres intervalles plus petits et de manière que $f''(x)$ ne change pas de signe, mais il est plus court de prendre les dérivées supérieures.

$$\begin{aligned} f'''(x) &= (3x^2 - 10) \cos x + 14x \sin x, \\ f^{iv}(x) &= (24 - 3x^2) \sin x + 20x \cos x, \end{aligned}$$

$f^{iv}(x)$ reste constamment positive entre 0 et 90° degrés; on a les deux suites

$$\begin{array}{ccccccc} (0) & \dots & + & - & - & - & - \\ (90^\circ) & \dots & + & + & + & - & - \end{array}$$

Il y a une variation dans chaque suite, par conséquent point de racines entre 0 et 90° degrés.

Dans l'intervalle de 90° à 180° degrés, $f''(x)$ reste posi-

(21)

tive et l'on a

$$\begin{array}{ccccccc} (90^\circ) & \dots & + & - & - & - & - \\ (180^\circ) & \dots & + & + & + & + & + \end{array}$$

Il existe donc une racine entre 90 et 180 degrés, c'est-à-dire entre $x = 1,5707951$ et $x = 3,1415927$. Resserrant ces limites, on trouve

$$\begin{array}{ccccccc} & & + & & + & & - \\ (2,5) & \dots & 26,04, & 12,029, & 0,816, & & \\ & & + & & + & & + \\ (2,6) & \dots & 27,2, & 14,707, & 0,519. & & \\ \frac{27,2}{2.12,029} & = 1, \dots, & k = -1, & n = 1; \end{array}$$

ainsi la condition $n \geq 1 - k$ n'est pas remplie. Resserrant encore les limites,

$$\begin{array}{ccccccc} & & + & & + & & - \\ (2,56) & \dots & 26,81, & 13,901, & & & \\ & & + & & + & & + \\ (2,57) & \dots & 26,92, & 13,88437, & 0,09057. & & \\ \frac{26,92}{2.13,8} & = 0,9, & k = 0, & n = 2; \end{array}$$

la condition est remplie; la limite *extrême* est 2.57. le quotient

$$\frac{0,09057}{13,88437} = 0,0065, \quad (2n + k = 4)$$

1^{re} approximation :

$$2,57 - 0,0066 = 2,5634,$$

valeur trop petite.

Dans l'opération suivante, on obtient la valeur exacte jusqu'à la huitième décimale ($4n + k = 8$).

$$\frac{f(2,5635)}{f'(2,5635)} = \frac{0,00090157}{13,7095659} = 0,0006576.$$

Ainsi la 2^e approximation est

$$2,5635 - 0,0006577 = 2,56343423.$$

Poisson trouve 2,56334 (*Mémoires de l'Académie des Sciences*, t. VIII, p. 420).

Il n'y a pas de racines entre 180 et 270 degrés ; il en existe une dans le quatrième quadrant et $f''(x)$ reste toujours négative dans cet intervalle ; on peut donc la prendre pour fonction déterminante.

$$(6,0) \dots \dots \quad \begin{array}{ccc} - & - & + \\ 75,7, & 100,34, & 6,01, \end{array}$$

$$(6,1) \dots \dots \quad \begin{array}{ccc} - & - & - \\ 67,95, & 107,53, & 4,38. \end{array}$$

On déduit successivement :

$$\begin{array}{ll} 1^{\text{re}} \text{ approximation} \dots \dots & 6,05 \\ 2^{\text{e}} \text{ approximation} \dots \dots & 6,0586 \\ 3^{\text{e}} \text{ approximation} \dots \dots & 6,0586701 \end{array}$$

Poisson trouve 6,05973.

Le nombre des racines est infini ; la $n^{\text{ième}}$ est comprise entre $(n - \frac{1}{2})\pi$ et $n\pi$.

Observation. Dans la dernière édition de l'excellente *Algèbre* de M. Bertrand, on donne une théorie simple des approximations pour les équations transcendentes, convenable aux examens, très-utile aux candidats. En fait d'approximations, les méthodes générales ne dispensent jamais d'imaginer des procédés particuliers pour des cas particuliers.