

Alvéoles des abeilles, exercice de calcul et de stéréotomie

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 15 (1856), p. 176-180

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1856_1_15__176_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1856, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**ALVÉOLES DES ABEILLES,
EXERCICE DE CALCUL ET DE STÉRÉOTOMIE.**

*Admunda tibi levium spectacula rerum
Et munire favos, et dædala fingere tecta.*

(VIRG., *Georg.* lib. IV.)

1. Soit ABCDEF un hexagone régulier, tracé sur un plan que nous supposons horizontal ; aux trois sommets A, C, E de rang impair, élevons trois verticales Aa, Ce, Ee de longueurs quelconques, mais égales ; aux trois sommets B, D, F, de rang pair, élevons aussi trois verticales Bb, Dd, Ff, égales entre elles, mais non aux trois premières verticales ; qu'on fasse

$$Bb = Aa + \frac{AB}{2\sqrt{2}};$$

en menant les droites *ab, bc, cd, de, ef, fa*, on formera six trapèzes verticaux et égaux et un hexagone équilatéral *abcdef*. Chaque trapèze, tel que AB*ab*, a deux angles droits en A et B, un angle obtus en *a* et un angle aigu en *b* ; la tangente de l'angle obtus est égale à $-2\sqrt{2}$, la tangente de la moitié de cet angle est $\sqrt{2}$, et la tangente de l'angle aigu est $2\sqrt{2}$; de sorte que l'angle obtus est égal à $109^{\circ} 28' 16''$ environ, et, par conséquent, l'angle aigu est égal à $70^{\circ} 30' 44''$ environ. Au sommet *a* existe donc un angle solide trièdre, formé par les deux angles obtus des trapèzes et par un troisième angle *fab* aussi obtus et égal à l'angle obtus des trapèzes ; propriété à démontrer. De même aux points *c* et *e*. Les droites *fa, ab* étant éga-

les, achevons le rhombe *fabi*; de sorte qu'on a en *a* un angle solide trièdre formé par deux trapèzes et un rhombe. Faisons la même construction en *c*; les deux rhombes *fabi*, *bcdi* ont le côté *bi* en commun, et en *b* il se forme un angle solide tétraèdre formé par deux trapèzes et deux rhombes présentant quatre angles plans, aigus et égaux. Les deux côtés *ia*, *ie* forment avec les côtés *af*, *ef* un troisième rhombe plan, égal aux précédents, ce qui est facile à prouver; de sorte qu'on aura en *i* un angle solide trièdre formé par trois rhombes et égal à chacun des angles solides en *a*, *c*, *e*; le point *i* est le *sommet* de l'alvéole. Le solide formé des six trapèzes et des trois rhombes représente les parois de l'alvéole en cire que construisent les abeilles. L'hexagone ABCDEF est l'entrée. Les trois rhombes sont la base de l'alvéole, le fond où est déposé le miel, nourriture du ver, première forme de l'insecte. Un système d'alvéoles compose un ensemble qu'on nomme *rayon*.

La liaison du système consiste dans la disposition suivante; les angles *dièdres* en *a* sont évidemment égaux chacun à 120 degrés.

Supposons qu'on remplisse un espace horizontal par des hexagones; qu'on construise sur chaque hexagone un alvéole. Les sommets seront dans un même plan horizontal, et trois faces rhomboïdales prises dans trois alvéoles contigus formeront une nouvelle base hexagonale, et le sommet de l'alvéole correspondant est au-dessous du plan des autres sommets, et achevant les alvéoles par ces nouvelles bases, les ouvertures hexagonales sont à l'opposé des ouvertures des premiers alvéoles. C'est ainsi que sont disposés les alvéoles dans chaque rayon, et par suite de cette construction toutes les faces rhomboïdales sont toutes dans trois plans, ce qui donne à tout l'édifice une extrême régularité. Les abeilles commencent par faire le rhombe et ensuite les faces trapèzes.

Il y a entre deux rayons consécutifs assez d'intervalle pour laisser passer deux mouches. L'ensemble de ces rayons forme la ruche.

2. Concevons les six sommets de l'ouverture hexagonale ainsi que le point a , et faisant mouvoir le point b le long de l'arête Bb , construisons les rhombes comme précédemment. A chaque position du point b correspond un autre solide alvéolaire.

Il faut démontrer que ces solides sont équivalents et que l'aire varie. Cette aire est un minimum, lorsque les trois angles plans en a sont égaux, ce qui entraîne la relation que nous avons donnée ci-dessus (voir la solution de feu le capitaine Jacob, t. I^{er}, p. 160).

3. *Note historique.* Le triangle équilatéral, le carré et l'hexagone régulier sont les seuls polygones réguliers qui, pris isolément, puissent remplir un espace sans laisser de vide, et de ces trois polygones l'hexagone pour la même aire a le moindre contour. C'est le polygone que les abeilles ont choisi pour l'ouverture de leurs cellules. Pappus, géomètre du iv^e siècle avant Jésus-Christ, en a déjà fait l'observation; mais les premières observations précises que nous ayons sur l'anatomie de l'insecte et la construction géométrique de l'alvéole sont dues à Maraldi (Jacques-Philippe), astronome de l'Observatoire royal, que son oncle, l'illustre Cassini, avait fait venir en 1687 de Perinaldo, près de Nice. Ces célèbres et curieuses observations ont été faites sur des ruches appartenant à Cassini placées dans le jardin attenant au bâtiment (*Mém. de l'Acad. des Sciences*, 1712, p. 297) (*). Ayant trouvé que les trois angles plans en a étaient égaux, il

(*) L'Observatoire était alors près de Paris, mais dehors. Un tel emplacement est aujourd'hui impérieusement exigé par les besoins de la science. Un édifice, modèle Pulkowa, serait un monument digne d'un règne dont les débuts sont si glorieux.

en conclut que cet angle devait être égal à $109^{\circ} 28'$; l'ayant mesuré, il trouva 110 degrés, différence qu'il attribue aux erreurs inévitables dans de telles opérations. Il compta soixante cellules environ dans chaque rayon; A'a avait 5 lignes et AB 2 lignes de longueur. Le célèbre Réaumur poussa ces recherches plus loin dans son *Histoire des Insectes*, d'une lecture si attachante (t. V) (*). Il proposa au géomètre Kœnig (Samuel), correspondant de l'Académie des Sciences, connu par ses démêlés avec Maupertuis, de chercher le rhombe qui satisfasse au minimum d'aire. Appliquant la méthode du *calcul infinitésimal*, Kœnig trouve que l'angle obtus devait avoir $109^{\circ} 26'$. Réaumur manda ce résultat à Maclaurin. L'éminent géomètre résolut le problème par la méthode de sa *Géométrie infinitésimale*, et trouva pour l'angle du rhombe $109^{\circ} 28' 16''$. Ce beau travail est inséré dans le tome XLII, année 1742, des *Transactions philosophiques*. Le Mémoire est intitulé : *Of the bases of the cells wherein the Bees deposit their honey* (Sur les bases des cellules où les abeilles déposent leur miel). Il fait partie d'une Lettre du 30 juin 1743, adressée à Martin Folkes, président de la Société royale. Ainsi les abeilles que Virgile a si admirablement chantées construisaient déjà de son temps, un problème dont la solution théorique était réservée au siècle des Newton et des Leibnitz. Donner un tel instinct à quelques molécules organisées ! La toute-puissance divine se révèle dans l'infiniment grand, se révèle dans l'infiniment petit. *Mens agit at molem*, disait l'antiquité; mais le monde des infiniment petits en his-

(*) Pourquoi ne fait-on pas une nouvelle édition rectifiée et complétée de cette délicieuse production ? J'en dis autant du *Spectacle de la nature*, de Pluche, que de Blainville aimait beaucoup. Ouvrages très-instructifs, d'une haute moralité et très-amusants : qualités dont la réunion est extrêmement rare.

toire naturelle et dans la science des nombres est une conquête des temps modernes. La théorie des quantités naissantes est similaire à celle de l'embryogénie. Les deux sciences doivent et devront leurs principaux progrès aux études infinitésimales. Leibnitz a mis entre les mains des géomètres un microscope qui nous découvre les propriétés d'une série indéfinie d'êtres numériques infiniment petits, se produisant les uns les autres suivant des lois de génération déterminées et certaines. Le microscope optique tend au même but pour les êtres organisés, ainsi que le polarimètre pour les corps inorganiques (*). Curieux de savoir si l'on rencontre dans la nature une forme analogue à celle que construisent les abeilles, je dois au savant professeur M. Cabart les renseignements suivants :

L'oxydule de cuivre cristallise sous forme de dodécaèdres rhomboïdaux, ayant huit angles trièdres, formés de trois dièdres de 120 degrés chacun. Les cristaux du grenat, de la pyrite de fer sont du même genre. L'eau glacée, d'après les observations de M. Clarke, physicien anglais, cristallisant dans le système rhomboédrique, présente deux trièdres formés de trois dièdres de 120 degrés chacun. Cette sorte de cristallisation est très-rare. Il est probable, d'après les calculs de M. Bravais sur les halos et les parhélies, que cette cristallisation existe dans les cristaux de neige. Les cristaux rhomboédriques de la chaux carbonatée ne présentent pas ces angles de 120 degrés.

(*) Leibnitz, dans une Lettre à Huyghens, dit : « J'aime mieux un Leuvenhoeck qui me dit ce qu'il voit, qu'un Cartésien qui me dit ce qu'il pense. » Excellente leçon donnée aux métaphysiciens par un métaphysicien, mais géomètre.