

E. CATALAN

Note sur la théorie des roulettes

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 15
(1856), p. 102-108

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1856_1_15__102_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1856, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

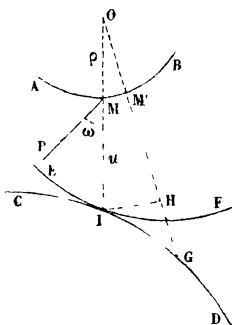
NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

NOTE SUR LA THÉORIE DES ROULETTES;

PAR E. CATALAN.

I. PROBLÈME. *Étant données deux lignes AB, CD situées dans un même plan, trouver une ligne EF telle, que si elle roule sur CD, un point M, invariablement lié à cette ligne EF, décrive AB.*



On sait que la droite menée du point *décrivant* M au point de contact I entre la *ligne roulante* EF et la *ligne fixe* CD est normale, en M, à la roulette AB.

Cela posé, on peut admettre que CD soit déterminée,

au moyen de AB, par les longueurs des normales telles que MI. En d'autres termes,

$$(1) \quad y = f(x)$$

étant l'équation de AB, l'autre ligne donnée CD pourra être représentée par une équation de la forme

$$(2) \quad u = \varphi(x).$$

Enfin on peut supposer que la ligne EF, *si elle existe*, soit rapportée aux coordonnées polaires u et ω , M étant le pôle, et l'axe étant une droite arbitraire MP, mobile avec le pôle. Il s'agit de trouver la relation entre ω et u .

A cet effet, menons la normale M'G à la roulette AB, au point M' infiniment voisin de M; et, du centre de courbure O, décrivons l'arc IH. Nous aurons, dans le triangle *rectangle* HGI,

$$(3) \quad \tan G = \frac{IH}{HG} = \frac{(\rho + u)\varepsilon}{du} = \left(1 + \frac{u}{\rho}\right) \frac{ds}{du},$$

en désignant par ρ le rayon de courbure, par ds l'élément MM', et par ε l'angle MOM' ou l'*angle de contingence* de la roulette AB.

D'un autre côté, on sait que

$$\tan G = u \frac{d\omega}{du},$$

donc

$$(4) \quad d\omega = \left(\frac{1}{u} + \frac{1}{\rho}\right) ds.$$

Si, au moyen des équations (1) et (2), on exprime ρ et ds en fonction de u et de du , la formule (4) donnera l'équation de la ligne cherchée EF. Par conséquent:

Toute courbe plane est une roulette.

II. Si

$$u = -\rho,$$

c'est-à-dire *si la ligne fixe CD est le lieu des centres de courbure des centres de la roulette AB*, l'équation (4) donne

$$d\omega = 0 \quad \text{ou} \quad \omega = \text{constante.}$$

Cette dernière équation représente une ligne droite. Donc, *la courbe quelconque AB peut être engendrée par un point M appartenant à une droite qui roule sur la développée de cette même courbe*; ce qui est évident.

III. Si $u = \text{constante}$,

$$\omega = \frac{s}{u} + \int \frac{ds}{\rho};$$

ou, à cause de

$$ds = dx \sqrt{1 + y'^2}, \quad \rho = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''},$$

$$\omega = \frac{s}{u} + \int \frac{y'' dx}{1 + y'^2},$$

ou encore

$$(5) \quad \omega = \frac{s}{u} + \text{arc tang } y' + \text{constante.}$$

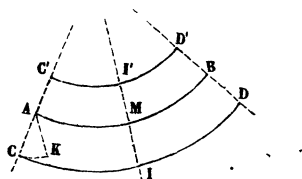
Mais le rayon vecteur u étant constant, *la courbe roulante EF est une circonférence dont le centre est le point décrivant M*. L'élément de cette circonférence, ou l'élément de la ligne fixe CD, a pour expression

$$(6) \quad d\sigma = u d\omega.$$

Si donc nous supposons, ce qui est permis, que $y' = 0$ donne $s = 0$ et $\sigma = 0$, nous aurons, à cause des relations (5) et (6),

$$\sigma = s + u \text{ arc tang } y'.$$

De là ce théorème très-probablement connu :



Si l'on considère une courbe AB et une parallèle CD à cette courbe, la différence entre les deux arcs correspondants CI, AM (c'est-à-dire terminés à deux normales communes AC, MI) est égale à l'arc de cercle CK, décrit de l'origine A comme centre, et terminé à une parallèle AK à la normale commune MI.

IV. Soit C'I'D' une autre parallèle à AMB, menée à la distance u . On aura

$$C'I' = AM - \text{arc tang } y',$$

et, par conséquent,

$$AM = \frac{1}{2} (CI + C'I').$$

Ainsi l'arc AM est égal à la demi-somme des arcs correspondants CI, C'I'; ce qui est encore évident.

V. Supposons que la ligne fixe CD soit droite. Alors, en prenant cette ligne pour axe des abscisses, on aura

$$(7) \quad u = y \sqrt{1 + y'^2};$$

puis, par l'équation (4),

$$(8) \quad \omega = \int \frac{dx}{y} + \text{arc tang } y' + \text{constante}.$$

Ces deux dernières formules feront connaître, dans chaque cas particulier, la courbe EF qui, roulant sur une

droite donnée, fait décrire, à un point qu'elle entraîne, une ligne donnée AB.

VI. Si, par exemple, AB est une droite ayant pour équation

$$y = x \tan \alpha,$$

les équations (7) et (8) deviendront

$$u = \frac{x \tan \alpha}{\cos^2 \alpha}, \quad \omega = \cot \alpha \cdot \log x + \alpha + \text{constante},$$

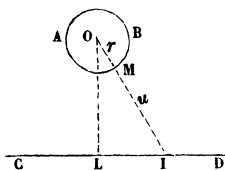
d'où en supposant $\omega = 0$ pour $x = 1$,

$$(9) \quad u = \frac{\tan \alpha}{\cos \alpha} e^{\omega \tan \alpha}.$$

Cette équation représente une spirale logarithmique. Donc, *quand une spirale logarithmique roule sur une droite, son pôle décrit une droite.*

VII. La ligne CD étant toujours une droite, si l'on prend, pour la roulette AB, une cycloïde ordinaire, une chaînette, etc., on trouve que la courbe roulante est une circonférence, une parabole, etc.

VIII. Considérons le cas particulier où, la ligne fixe



étant toujours une droite CD, la roulette AB serait une circonférence de rayon r . Désignons par β l'ordonnée OL de son centre et par φ l'angle IOL. Nous aurons

$$u = \frac{\beta}{\cos \varphi} - r, \quad \rho = r, \quad ds = r d\varphi;$$

puis

$$d\omega = \frac{\beta d\varphi}{\beta - r \cos \varphi}.$$

L'intégrale de cette équation est, en supposant $\omega = 0$ pour $\varphi = 0$,

$$\omega = \frac{2\beta}{\sqrt{\beta^2 - r^2}} \arctan \left[\sqrt{\frac{\beta+r}{\beta-r}} \tan \frac{1}{2} \varphi \right].$$

Mais, à cause de $\cos \varphi = \frac{\beta}{u+r}$,

$$\tan \frac{1}{2} \varphi = \sqrt{\frac{u+r-\beta}{u+r+\beta}},$$

donc l'équation de la courbe EF est

$$\omega = \frac{2\beta}{\sqrt{\beta^2 - r^2}} \arctan \sqrt{\frac{(\beta+r)(u+r-\beta)}{(\beta-r)(u+r+\beta)}}.$$

Celle-ci donne, par un calcul facile,

$$(10) \quad u = \frac{\frac{\beta^2 - r^2}{r}}{1 + \frac{\beta}{r} \cos \frac{\omega \sqrt{\beta^2 - r^2}}{\beta}}.$$

Cette dernière équation a la forme de celle qui appartient aux *transformées des sections coniques* (*). Mais, comme le multiplicateur de ω est une fraction proprement dite, la ligne EF représentée par l'équation (10) n'est pas une de ces transformées.

IX. Les derniers calculs supposent l'ordonnée β plus grande que le rayon r .

(*) *Traité élémentaire de Géométrie descriptive*, seconde partie, p. 58.

(108)

Si $\beta = r$, la formule (10) doit être remplacée par

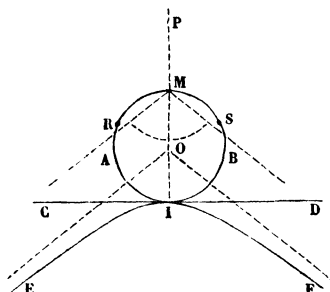
$$(11) \quad u = \frac{2r}{(C - \omega)^2 - 1},$$

C désignant la constante arbitraire.

Si on la suppose nulle, l'équation (11) devient

$$(12) \quad u = \frac{2r}{\omega^2 - 1},$$

$\omega = 0$ donne $u = -2$; ainsi quand le point de contact entre la courbe roulante et la droite CD se confond avec le point de contact I entre la droite et la circonférence AB, le point décrivant est en M, à l'extrémité du diamètre IM, et l'axe des amplitudes est dirigé suivant le prolongement MP de ce diamètre.



La courbe roulante EIF a deux asymptotes, parallèles aux rayons vecteurs *infinis* déterminés par

$$\omega = \pm 1,$$

et situées à une distance de ces rayons égale à r . Quand cette courbe roulera sur CD, le point M décrira l'arc RMS, dont la longueur est égale au diamètre IM. Etc.