SCHLOMILCH

Note sur la quadrature élémentaire du cercle

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 14 (1855), p. 462-464

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1855_1_14__462_0>

NOTE SUR LA QUADRATURE ÉLÉMENTAIRE DU CERCLE;

PAR M. SCHLOMILCH,
Professeur à l'université de Dresde.

En désignant par S_n l'aire d'un polygone régulier de n côtés inscrit an cercle et par T_n l'aire du polygone circonscrit correspondant, on a, comme on sait, les deux relations

$$(1) \qquad S_{2n} = \sqrt{S_n T_n}, \quad T_{2n} = \frac{2 S_{2n} T_n}{S_{2n} + T_n}.$$

On se sert de ces formules pour le calcul numérique du rapport entre le rayon et l'aire du cercle, mais ce calcul est peu commode parce qu'il faut aller jusqu'au nombre $n = 32768$ pour trouver sept décimales de π. C'est pourquoi nous allons développer une formule approximative qui jouit d'une grande précision et qui donne déjà pour $n = 256$ le même résultat que les formules ci-dessus pour $n = 32768$.

Pour rendre plus traitables les relations (1), nous prenons

$$\frac{1}{S_n} = \overset{*}{S}_n, \quad \frac{1}{T_n} = \overset{*}{T}_n,$$

ce qui donne

$$(2) \qquad \overset{*}{S}_{2n} = \sqrt{\overset{*}{S}_n \overset{*}{T}_n}, \quad \overset{*}{T}_{2n} = \frac{1}{2}(\overset{*}{S}_{2n} + \overset{*}{T}_n).$$

D'autre part, il est connu que l'on peut remplacer la moyenne géométrique entre deux nombres α et $\alpha + \delta$ par la moyenne arithmétique, pourvu que l'erreur commise qui ne surpasse jamais la quantité $\frac{\delta^2}{8\alpha}$ n'altère pas le degré de précision que l'on désire (*). En faisant usage de ce principe, nous posons un terme quelconque

$$\overset{*}{T}_k = \alpha \quad \text{et} \quad \overset{*}{S}_k = \alpha + \delta,$$

et nous aurons

$$\overset{*}{S}_{2k} = \alpha + \frac{1}{2}\delta,$$

$$\overset{*}{T}_{2k} = \alpha + \frac{1}{4}\delta,$$

$$\overset{*}{S}_{4k} = \alpha + \frac{1}{4}\delta + \frac{1}{8}\delta,$$

$$\overset{*}{T}_{8k} = \alpha + \frac{1}{4}\delta + \frac{1}{16}\delta,$$

$$\overset{*}{S}_{8k} = \alpha + \frac{1}{4}\delta + \frac{1}{16}\delta + \frac{1}{32}\delta,$$

$$\overset{*}{T}_{8k} = \alpha + \frac{1}{4}\delta + \frac{1}{16}\delta + \frac{1}{64}\delta.$$

. . . .

(*) L'équation identique

$$\sqrt{\alpha(\alpha+\delta)} = \sqrt{\left(\alpha + \frac{1}{2}\delta\right)^2 - \frac{1}{4}\delta^2}$$

fait voir que l'on a toujours

$$\sqrt{\alpha(\alpha+\delta)} < \alpha + \frac{1}{2}\delta.$$

Soit de plus ε l'erreur que l'on commet en remplaçant $\sqrt{\alpha(\alpha+\delta)}$ par $\alpha + \frac{1}{2}\delta$, on a

$$\sqrt{\alpha(\alpha+\delta)} = \alpha + \frac{1}{2}\delta - \varepsilon$$

et

$$\sqrt{\alpha(\alpha+\delta)} + \varepsilon = \alpha + \frac{1}{2}\delta;$$

le carré de cette équation est

$$2\sqrt{\alpha(\alpha+\delta)} + \varepsilon^2 = \frac{1}{4}\delta^2,$$

ce qui donne

$$\varepsilon = \frac{\frac{1}{4}\delta^2}{2\sqrt{\alpha(\alpha+\delta)} + \varepsilon} < \frac{\delta^2}{8\alpha}.$$

La limite vers laquelle convergent ces expressions est évidemment

$$\frac{1}{\pi} = \alpha + \frac{1}{4}\delta + \frac{1}{16}\delta + \frac{1}{64}\delta + \frac{1}{256}\delta + \ldots$$

$$= \alpha + \frac{1}{3}\delta = \overset{*}{T}_k + \frac{1}{3}(\overset{*}{S}_k - \overset{*}{T}_k) = \frac{1}{3}(\overset{*}{S}_k + 2\overset{*}{T}_k).$$

En substituant les valeurs de $\overset{*}{S}_k$ et de $\overset{*}{T}_k$, on parvient à la formule très-simple

$$\pi = \frac{3 S_k T_k}{2 S_k + T_k}. \tag{3}$$

L'erreur commise est moindre que la quantité

$$\frac{(\overset{*}{S}_k - \overset{*}{T}_k)^2}{8\overset{*}{T}_k} = \frac{(T_k - S_k)^2}{8 S^2_k T_k}.$$

Pour rendre plus commode cette expression, nous remarquons que l'on a toujours $S_k > S_3$, pourvu que $k > 3$; il suit de là

$$S_k > \frac{3}{4}\sqrt{3} \quad \text{et} \quad S^2_k > \frac{27}{16};$$

d'autre part, il est clair que T_k surpasse toujours le nombre 3, on a donc

$$8 S^2_k T_k > 8 \cdot \frac{27}{16} \cdot 3 > 40;$$

l'erreur commise est donc moindre que la quantité $\frac{1}{40}(T_k - S_k)^2$.

Ce petit développement n'enrichit point la science, mais nous croyons qu'il peut être utile pour l'enseignement de la géométrie.