

YVON VILLARCEAU

**Théorie analytique du gyroscope
de M. L. Foucault**

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 14
(1855), p. 449-461

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1855_1_14__449_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1855, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

THÉORIE ANALYTIQUE DU GYROSCOPE DE M. L. FOUCAULT;
PAR M. YVON VILLARCEAU

 (voir page 343).

Intégration de l'équation (47) par les fonctions elliptiques.

 8. *Cas de n positif.* Soient

$$(48) \quad \xi = \cos \gamma, \quad \xi_0 = \cos \gamma_0,$$

d'où

$$\sin \gamma \, d\gamma = - d\xi,$$

et, par suite,

$$d\gamma = \pm \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} d\xi;$$

l'équation (47) donnera

$$(49) \quad \sqrt{\frac{2g}{a}} dt = \pm \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(\xi-\xi_0)[1-\delta(\xi+\xi_0)]}}.$$

Désignons par R la valeur du radical du deuxième membre en y comprenant le double signe, et posons

$$(50) \quad (\xi - \xi_0)[1 - \delta(\xi + \xi_0)] = (1 - \xi^2)z^2,$$

nous aurons

$$(51) \quad R = (1 - \xi^2)z.$$

et l'équation à intégrer deviendra

$$(52) \quad \sqrt{\frac{2g}{a}} dt = \frac{d\xi}{R}.$$

Tirons de l'équation (50) la valeur de ξ en z^2 , il viendra

$$(53) \quad \xi(z^2 - \delta) = -\frac{1}{2} + Z,$$

en posant

$$Z^2 = \frac{1}{4} [1 - 4\delta\xi_0(1 - \delta\xi_0)] + z^2 [\xi_0(1 - \delta\xi_0) - \delta] + z^4$$

ou

$$Z^2 = \frac{1}{4} (1 - 2\delta\xi_0)^2 + [\xi_0 - \delta(1 + \xi_0^2)] z^2 + z^4.$$

Différentiant actuellement l'équation (50), on a

$$[1 + 2\xi(z^2 - \delta)] d\xi = 2(1 - \xi^2) z dz,$$

d'où, en ayant égard aux équations (51) et (53),

$$\frac{d\xi}{R} = \frac{dz}{Z};$$

il s'ensuit

$$(54) \quad \sqrt{\frac{2g}{a}} dt = \frac{dz}{Z}.$$

Nous remarquerons que si l'on néglige les termes en δ , la valeur de Z^2 est plus grande que $\frac{1}{4}\xi_0^2 + \xi_0 z^2 + z^4 = \left(\frac{1}{2}\xi_0 + z^2\right)^2$, quantité essentiellement positive; nous pouvons donc

(451)

écrire

$$(54 \text{ bis}) \quad Z^2 = v^2 + 2v \cos 2\pi \cdot z^2 + z^4.$$

Pour identifier cette valeur avec la précédente, il suffit de poser

$$v^2 = \frac{1}{4}(1 - 2\delta\xi_0)^2,$$

$$2v \cos 2\pi = \xi_0 - \delta(1 + \xi_0^2),$$

d'où

$$(55) \quad 2v = 1 - 2\delta\xi_0,$$

$$\cos 2\pi = \frac{\xi_0 - \delta(1 + \xi_0^2)}{1 - 2\delta\xi_0};$$

on en tire

$$\sin^2 \pi = \frac{1 - \xi_0 + \delta(1 - 2\xi_0 + \xi_0^2)}{2(1 - 2\delta\xi_0)} = \frac{1 - \xi_0}{2} \frac{1 + \delta(1 - \xi_0)}{1 - 2\delta\xi_0},$$

ou bien, à cause de $\xi_0 = \cos \gamma_0$,

$$\sin^2 \pi = \sin^2 \frac{1}{2} \gamma_0 \frac{1 + 2\delta \sin^2 \frac{1}{2} \gamma_0}{1 - 2\delta \cos \gamma_0}$$

et

$$(56) \quad \sin \pi = \pm \sin \frac{1}{2} \gamma_0 \sqrt{\frac{1 + 2\delta \sin^2 \frac{1}{2} \gamma_0}{1 - 2\delta \cos \gamma_0}}.$$

Soit actuellement

$$(57) \quad z = \sqrt{v} \tan \frac{1}{2} \varphi,$$

d'où

$$(58) \quad dz = \frac{1}{2} \sqrt{v} \frac{d\varphi}{\cos^2 \frac{1}{2} \varphi};$$

(452)

la valeur de Z^2 (54 bis) deviendra

$$\begin{aligned} Z^2 &= v^2 \left(1 + 2 \cos 2\alpha \tan^2 \frac{1}{2} \varphi + \tan^4 \frac{1}{2} \varphi \right) \\ &= \frac{v^2}{\cos^4 \frac{1}{2} \varphi} \left[\cos^4 \frac{1}{2} \varphi + 2(1 - 2 \sin^2 \alpha) \sin^2 \frac{1}{2} \varphi \cos^2 \frac{1}{2} \varphi + \sin^4 \frac{1}{2} \varphi \right] \\ &= \frac{v^2}{\cos^4 \frac{1}{2} \varphi} \left[\left(\cos^2 \frac{1}{2} \varphi + \sin^2 \frac{1}{2} \varphi \right)^2 - 4 \sin^2 \alpha \sin^2 \frac{1}{2} \varphi \cos^2 \frac{1}{2} \varphi \right], \end{aligned}$$

et, si l'on pose

$$c^2 = \sin^2 \alpha,$$

on aura simplement

$$(59) \quad Z = \pm \frac{v}{\cos^2 \frac{1}{2} \varphi} \sqrt{1 - c^2 \sin^2 \varphi};$$

il en résultera

$$(60) \quad \frac{dz}{Z} = \pm \frac{1}{2\sqrt{v}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - c^2 \sin^2 \varphi}}.$$

A l'aide de cette valeur et de celle de $2v$, l'équation (54) devient

$$(61) \quad dt = \frac{1}{2\sqrt{1 - 2\delta \cos \gamma_0}} \sqrt{\frac{a}{g}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - c^2 \sin^2 \varphi}}.$$

Nous avons supprimé ici le double signe, attendu que l'élément du temps dt est essentiellement positif et que nous allons disposer de l'angle φ pour que $d\varphi$ le soit pareillement. A cet effet, les équations (50), (55) et (57) donnent

$$\tan^2 \frac{1}{2} \varphi = \pm \sqrt{2 \frac{(\xi - \xi_0) [1 - \delta (\xi + \xi_0)]}{(1 - \xi^2) (1 - 2\delta \xi_0)}},$$

ou, en vertu des équations (48),

$$(62) \tan \frac{1}{2} \varphi = \pm \frac{1}{\sin \gamma} \sqrt{\frac{2 (\cos \gamma - \cos \gamma_0) [1 - \delta (\cos \gamma + \cos \gamma_0)]}{1 - 2 \delta \cos \gamma_0}}.$$

Cette valeur peut encore s'écrire :

$$\tan \frac{1}{2} \varphi = \pm \frac{2}{\sin \gamma} \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2}(\gamma_0 - \gamma) \sin \frac{1}{2}(\gamma_0 + \gamma)}{1 - 2 \delta \cos \gamma_0} \left[1 - 2 \delta \cos \frac{1}{2}(\gamma_0 + \gamma) \cos \frac{1}{2}(\gamma_0 - \gamma) \right]}.$$

Nous avons vu que les valeurs de γ se succèdent dans l'ordre

$$+ \gamma_0, 0, - \gamma_0, 0, + \gamma_0, 0, - \gamma_0 \dots$$

Pour fixer les idées, supposons $\sin \gamma_0$ positif et écrivons les valeurs correspondantes de $\tan \frac{1}{2} \varphi$, en prenant les signes inférieur ou supérieur suivant que $d\gamma$ est positif ou négatif; inscrivons aussi les signes que prennent ces tangentes dans l'intervalle de deux valeurs consécutives de γ , et nous aurons la suite

$$0 + \infty - 0 + \infty - 0 + \infty - 0, \dots;$$

les valeurs correspondantes de $\frac{1}{2} \varphi$ seront

$$0, \quad \frac{\pi}{2}, \quad \pi, \quad 3 \frac{\pi}{2}, \quad 2\pi, \quad 5 \frac{\pi}{2}, \quad 3\pi, \dots,$$

et celles de φ

$$0, \quad \pi, \quad 2\pi, \quad 3\pi, \quad 4\pi, \quad 5\pi, \quad 6\pi, \dots$$

Le passage de la valeur γ_0 à $- \gamma_0$ et inversement répond à une variation de φ égale à 2π . Si $\sin \gamma_0$ est négatif, on prendra encore dans $\tan \frac{1}{2} \varphi$ les signes inférieur ou supérieur suivant que $d\gamma$ est positif ou négatif, et

l'on aura de même une suite ascendante et continue de valeurs de φ .

Intégrons l'équation (61); il viendra, en comptant le temps à partir de l'instant où γ est égal à γ_0 et prenant φ nul à cette époque,

$$(63) \quad t = \frac{1}{2\sqrt{1-2\delta\cos\gamma_0}} \sqrt{\frac{a}{g}} F(c, \varphi).$$

Pour avoir la durée de l'oscillation simple, ou entre les limites $+\gamma_0$ et $-\gamma_0$, il faudra faire $\varphi = 2\pi$, d'après ce qui vient d'être dit. Mais on a

$$F(c, 2\pi) = 4F\left(c, \frac{\pi}{2}\right);$$

désignant par T la durée de l'oscillation, on aura

$$(64) \quad T = \frac{2}{\sqrt{1-2\delta\cos\gamma_0}} \sqrt{\frac{a}{g}} F\left(c, \frac{\pi}{2}\right),$$

équation dans laquelle

$$(65) \quad c = \pm \sin \frac{1}{2} \gamma_0 \sqrt{\frac{1 + 2\delta \sin^2 \frac{1}{2} \gamma_0}{1 - 2\delta \cos \gamma_0}}.$$

Quand on néglige δ , l'angle du module se réduit à $\pm \frac{1}{2} \gamma_0$, et si l'on suppose d'ailleurs γ_0 infiniment petit, il vient

$$F(c, \varphi) = \varphi, \quad \text{d'où} \quad F\left(c, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2};$$

on retombe alors sur la formule ordinaire du pendule

$$T = \pi \sqrt{\frac{a}{g}}.$$

9. *Cas de n négatif.* Nous avons dit que nous supposions $\sin \eta$ positif; $\sin \theta'$ étant d'ailleurs essentiellement positif et ω très-petit par rapport à n , la valeur de a ,

première équation (46), devient négative. Dans ce cas, il faut, ainsi que nous l'avons fait voir, que $\cos \gamma - \cos \gamma_0$ soit négatif. De cette manière, l'équation (49) doit être changée en

$$(66) \quad \sqrt{\frac{2g}{-a}} dt = \pm \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(\xi_0-\xi)[1-\delta(\xi_0+\xi)]}}.$$

En comparant le deuxième membre de cette équation à celui de l'équation (49), on reconnaît que l'on passe de celui-ci à l'autre au moyen d'un changement de signes des quantités ξ , ξ_0 et δ ; d'où résulte la nécessité de changer γ en $180^\circ - \gamma$ et γ_0 en $180^\circ - \gamma_0$. De cette manière, les relations (56) et (62) se transforment en

$$(67) \quad \left\{ \begin{array}{l} c = \sin \alpha = \pm \cos \frac{1}{2} \gamma_0 \sqrt{\frac{1 - 2\delta \cos^2 \frac{1}{2} \gamma_0}{1 - 2\delta \cos \gamma_0}} \\ \tan \frac{1}{2} \varphi = \pm \frac{1}{\sin \gamma} \sqrt{\frac{2(\cos \gamma_0 - \cos \gamma)[1 - \delta(\cos \gamma_0 + \cos \gamma)]}{1 - 2\delta \cos \gamma_0}} \end{array} \right.$$

Dans le cas actuel, les valeurs de γ , en supposant, par exemple, γ_0 positif, se succèdent dans l'ordre

$$\gamma_0, \pi, 2\pi - \gamma_0, \pi, \gamma_0, \pi, 2\pi - \gamma_0, \pi, \gamma_0, \dots$$

Prenant ici le signe supérieur ou inférieur, suivant que $d\varphi$ est positif ou négatif, on aura encore la suite correspondante des valeurs de $\tan \frac{1}{2} \varphi$

$$0 + \infty \quad - 0 \quad + \infty - 0 + \infty \quad - 0 \quad + \infty - 0 \dots,$$

puis la série suivante des valeurs de $\frac{1}{2} \varphi$

$$0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi, \frac{5\pi}{2}, 3\pi, \frac{7\pi}{2}, 4\pi, \dots,$$

et celles de φ

$$0, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, 5\pi, 6\pi, 7\pi, 8\pi, \dots;$$

en sorte que la valeur générale de t (63), se transforme en

$$(68) \quad t = \frac{1}{2\sqrt{1-2\delta\cos\gamma_0}} \sqrt{\frac{-a}{g}} F(c, \varphi).$$

La durée d'une oscillation répondant aux limites γ_0 et $2\pi - \gamma_0$ de γ , ou bien aux limites 0 et 2π de φ comme ci-dessus, il vient, pour la durée T de l'oscillation,

$$(69) \quad T = \frac{2}{\sqrt{1-2\delta\cos\gamma_0}} \sqrt{\frac{-a}{g}} F\left(c, \frac{\pi}{2}\right).$$

En négligeant δ , on voit que l'angle du module c est $90^\circ - \frac{1}{2}\gamma_0$, il est complémentaire de celui qui répond au cas de n positif. Si l'on suppose γ_0 infiniment petit, le module c devient égal à l'unité, et la fonction $F\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$ infinie; il en résulte que le plan de l'anneau étant mis sans vitesse en coïncidence avec le plan horaire reste dans cette position sans osciller, lorsque n est négatif; mais alors il est en équilibre instable, car pour peu qu'on l'éloigne de cette position, ou, en d'autres termes, quelque petite valeur de γ_0 que l'on détermine, la valeur de T cesse de devenir infinie, elle devient seulement très-grande.

Calcul de α .

10. En ajoutant membre à membre les équations (41) et (42) on trouve

$$\frac{d\alpha}{dt} = \omega - \omega \sin \theta' \sin \eta (\cos \gamma - \cos \gamma_0) - \cos \eta \frac{d\gamma}{dt},$$

d'où l'on tire

$$(70) \quad \alpha = \omega t - \gamma \cos \eta - \omega \sin \theta' \sin \eta \int (\cos \gamma - \cos \gamma_0) dt.$$

Il s'agit d'effectuer l'intégration indiquée au dernier terme.

Considérons le cas où n et a sont positifs.

On tire de l'équation (62), en ayant égard à la relation (55),

$$(71) \cos \gamma - \cos \gamma_0 = v \sin^2 \gamma \tan^2 \frac{1}{2} \varphi + \delta (\cos^2 \gamma - \cos^2 \gamma_0).$$

A cause de $\xi = \cos \gamma$, les équations (53), (57) et (59) donnent

$$\cos \gamma = \frac{-\frac{1}{2} + Z}{v \tan^2 \frac{1}{2} \varphi - \delta} = \frac{-\frac{1}{2} \cos^2 \frac{1}{2} \varphi \pm v \sqrt{1 - c^2 \sin^2 \varphi}}{v \sin^2 \frac{1}{2} \varphi - \delta \cos^2 \frac{1}{2} \varphi}.$$

Pour distinguer quel signe il convient de donner au radical, observons que nous devons avoir $\cos \gamma = \cos \gamma_0$ pour $\varphi = 0$, d'après ce qui a été convenu dans les numéros précédents. Or le signe $+$ produit seul ce résultat, car l'équation précédente, en y mettant la valeur de v , donne alors

$$\cos \gamma = \frac{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} (1 - 2\delta \cos \gamma_0)}{-\delta} = \cos \gamma_0;$$

on a donc généralement

$$\cos \gamma = \frac{v \sqrt{1 - c^2 \sin^2 \varphi} - \frac{1}{2} \cos^2 \frac{1}{2} \varphi}{v \sin^2 \frac{1}{2} \varphi - \delta \cos^2 \frac{1}{2} \varphi}.$$

Le terme qu'il s'agit d'intégrer étant déjà affecté du facteur ω qui est extrêmement petit relativement à w , nous pouvons négliger δ dans l'expression différentielle, ce qui réduira la valeur de v à $\frac{1}{2}$; et l'équation (71) don-

nera

$$\int (\cos \gamma - \cos \gamma_0) dt = \frac{1}{2} \int \sin^2 \gamma \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} \varphi dt.$$

La valeur de $\cos \gamma$ devient elle-même

$$\cos \gamma = \frac{\sqrt{1 - c^2 \sin^2 \varphi} - \cos^2 \frac{1}{2} \varphi}{\sin^2 \frac{1}{2} \varphi},$$

expression dont l'indétermination, dans le cas de $\varphi = 2i\pi$, est facile à lever ; on en tire

$$\begin{aligned} \sin^2 \gamma &= \frac{\sin^4 \frac{1}{2} \varphi - \cos^4 \frac{1}{2} \varphi - (1 - c^2 \sin^2 \varphi) + 2 \cos^2 \frac{1}{2} \varphi \sqrt{1 - c^2 \sin^2 \varphi}}{\sin^4 \frac{1}{2} \varphi} \\ &= \frac{-\left(\cos^2 \frac{1}{2} \varphi - \sin^2 \frac{1}{2} \varphi\right) - 1 + 4c^2 \sin^2 \frac{1}{2} \varphi \cos^2 \frac{1}{2} \varphi + 2 \cos^2 \frac{1}{2} \varphi \sqrt{1 - c^2 \sin^2 \varphi}}{\sin^4 \frac{1}{2} \varphi} \end{aligned}$$

ou

$$\sin^2 \gamma = 2 \frac{\cos^2 \frac{1}{2} \varphi}{\sin^4 \frac{1}{2} \varphi} \left(2c^2 \sin^2 \frac{1}{2} \varphi - 1 + \sqrt{1 - c^2 \sin^2 \varphi} \right),$$

et l'intégrale proposée devient

$$\int (\cos \gamma - \cos \gamma_0) dt = \int \left[2c^2 - \frac{1}{\sin^2 \frac{1}{2} \varphi} + \frac{\sqrt{1 - c^2 \sin^2 \varphi}}{\sin^2 \frac{1}{2} \varphi} \right] dt.$$

L'intégrale du premier terme est $2c^2 t$. Quant aux autres termes, nous mettrons à la place de dt sa valeur (61) en y négligeant le terme en ∂ . Soit, pour abréger,

$$\Delta = \sqrt{1 - c^2 \sin^2 \varphi},$$

il viendra

$$\int (\cos \gamma - \cos \gamma_0) dt = 2c^2 t - \sqrt{\frac{a}{g}} \left[\int \frac{1}{2 \sin^2 \frac{1}{2} \varphi} \frac{d\varphi}{\Delta} - \int \frac{d\varphi}{2 \sin^2 \frac{1}{2} \varphi} \right].$$

La première de ces deux intégrales peut s'écrire

$$\int \frac{1}{2 \sin^2 \frac{1}{2} \varphi} \frac{d\varphi}{\Delta} = \int \frac{1}{1 - \cos \varphi} \frac{d\varphi}{\Delta} = \int \frac{1 + \cos \varphi}{1 - \cos^2 \varphi} \frac{d\varphi}{\Delta} = \int \frac{1 + \cos \varphi}{\sin^2 \varphi} \frac{d\varphi}{\Delta},$$

il vient donc

$$\int \frac{1}{2 \sin^2 \frac{1}{2} \varphi} \frac{d\varphi}{\Delta} = \int \frac{1}{\sin^2 \varphi} \frac{d\varphi}{\Delta} + \int \frac{\cos \varphi}{\sin^2 \varphi} \frac{d\varphi}{\Delta}.$$

Pour effectuer la première des intégrations indiquées au second membre, différencions l'expression

$$\sqrt{1 - c^2 \sin^2 \varphi} \cot \varphi,$$

il viendra

$$\begin{aligned} d. \sqrt{1 - c^2 \sin^2 \varphi} \cot \varphi &= - \sqrt{1 - c^2 \sin^2 \varphi} \frac{d\varphi}{\sin^2 \varphi} - \frac{c^2 \cos^2 \varphi}{\sqrt{1 - c^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi \\ &= - \frac{1 - c^2 \sin^2 \varphi + c^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi}{\sin^2 \varphi \sqrt{1 - c^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi \\ &= - \frac{1 - c^2 \sin^4 \varphi}{\sin^2 \varphi \sqrt{1 - c^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi, \end{aligned}$$

d'où

$$d. \Delta \cot \varphi = - \frac{1}{\sin^2 \varphi} \frac{d\varphi}{\Delta} + c^2 \frac{\sin^2 \varphi}{\Delta} d\varphi;$$

on en tire

$$\int \frac{1}{\sin^2 \varphi} \frac{d\varphi}{\Delta} = c^2 \int \frac{\sin^2 \varphi}{\Delta} d\varphi - \Delta \cot \varphi.$$

L'intégrale au second membre est la fonction elliptique que les géomètres allemands substituent à la fonction de deuxième espèce $\int \Delta d\varphi$ de Legendre.

Posons maintenant

$$x = c \sin \varphi,$$

d'où

$$\cos \varphi d\varphi = \frac{dx}{c},$$

il viendra, en faisant abstraction de la constante,

$$\int \frac{\cos \varphi d\varphi}{\sin^2 \varphi \Delta} = \int \frac{c}{x^2 \sqrt{1-x^2}} = -\frac{c}{x} \sqrt{1-x^2} = -\frac{\Delta}{\sin \varphi}.$$

On a donc

$$\int \frac{1}{2 \sin^2 \frac{1}{2} \varphi} \frac{d\varphi}{\Delta} = c^2 \int \frac{\sin^2 \varphi}{\Delta} d\varphi - \frac{\Delta}{\sin \varphi} (1 + \cos \varphi);$$

on a d'ailleurs directement

$$- \int \frac{d\varphi}{2 \sin^2 \frac{1}{2} \varphi} = + \frac{\cos \frac{1}{2} \varphi}{\sin \frac{1}{2} \varphi} = \frac{2 \cos^2 \frac{1}{2} \varphi}{\sin \varphi} = \frac{1 + \cos \varphi}{\sin \varphi}.$$

Réunissant ces deux intégrales, il vient

$$\int \frac{1}{2 \sin^2 \frac{1}{2} \varphi} \frac{d\varphi}{\Delta} - \int \frac{d\varphi}{2 \sin^2 \frac{1}{2} \varphi} = c^2 \int \frac{\sin^2 \varphi}{\Delta} d\varphi + \frac{1 + \cos \varphi}{\sin \varphi} (1 - \Delta)$$

Pour éviter l'indétermination qui se présenterait dans le cas de $\sin \varphi = 0$, nous multiplierons haut et bas le dernier terme par $(1 + \Delta)$; il viendra

$$\frac{1 + \cos \varphi}{\sin \varphi} (1 - \Delta) = \frac{1 + \cos \varphi}{\sin \varphi} \frac{c^2 \sin^2 \varphi}{1 + \Delta} = c^2 \frac{\sin \varphi \cos \frac{1}{2} \varphi}{1 + \Delta}.$$

De cette manière, on aura

$$\int (\cos \gamma - \cos \gamma_0) dt = 2c^2 t - c^2 \sqrt{\frac{a}{g}} \left[\int \frac{\sin^2 \varphi}{\Delta} d\varphi + \frac{2 \sin \varphi \cos^2 \frac{1}{2} \varphi}{1 + \Delta} \right].$$

Substituant enfin cette valeur dans l'équation (70) et supposant que, pour $t = 0$, on ait $\alpha = 0$, $\gamma = \gamma_0$, $\varphi = 0$, l'expression de α deviendra finalement

$$(72) \left\{ \begin{aligned} \alpha = & (\omega - 2\omega \sin \theta' \sin \eta c^2) t - (\gamma - \gamma_0) \cos \eta \\ & + \omega \sin \theta' \sin \eta c^2 \sqrt{\frac{a}{g}} \left(\int_0^\varphi \frac{\sin^2 \varphi}{\Delta} d\varphi + \frac{2 \sin \varphi \cos^2 \frac{1}{2} \varphi}{1 + \Delta} \right). \end{aligned} \right.$$

On pourra s'assurer aisément que si la quantité a ou n est négative, il suffira de changer ici les signes de a et des termes en ω , en calculant d'ailleurs le module c et l'amplitude φ au moyen des formules qui conviennent au cas de n négatif.

La formule (72) fait voir que l'angle α , indépendamment de variations périodiques provenant de $(\gamma - \gamma_0)$, du terme en $\sin \varphi \cos^2 \frac{1}{2} \varphi$ et de la fonction elliptique, subit des variations proportionnelles au temps introduites par cette même fonction elliptique et le terme en $c^2 t$, qui se confondent avec le terme principal ωt .

Leur grandeur et leur signe dépendent de la demi-amplitude des oscillations et du sens du mouvement.

La suite prochainement.