Nouvelles annales de mathématiques

Housel

Sur le problème de Halley (voir p. 268)

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 14 (1855), p. 425-433
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1855_1_14__425_1>

SUR LE PROBLÈME DE HALLEY

(voir p. 268);

PAR M. HOUSEL,
Professeur.

Le théorème de Nicollic peut s'énoncer de la manière suivante :

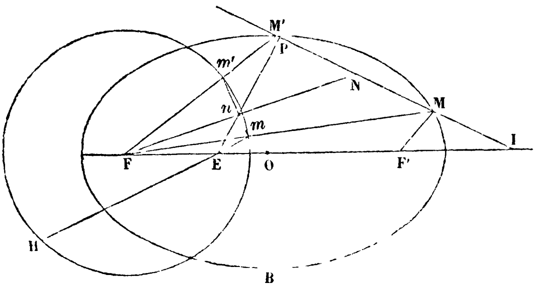
Étant donnés trois points d'une conique et l'un de ses foyers, de ce foyer comme centre et d'un rayon quelconque décrivez une circonférence sur laquelle les rayons vecteurs determineront trois cordes correspondant aux côtés du triangle formés par les points donnés.

Joignez le foyer au milieu d'une des cordes de la conique; cette médiane coupera la corde correspondante du cercle en un certain point, duquel vous abaisserez une perpendiculaire sur la corde de la conique; faites la même construction pour les deux autres cordes, les trois perpendiculaires concourront en un même point qui sera sur l'axe focal.

La distance de ce point au foyer sera égale au rayon du cercle multiplié par le rapport d'excentricité de la conique.

Nous allons démontrer ce théorème en renversant l'énoncé et chercher le point où la perpendiculaire, menée comme on vient de l'indiquer sur une corde de la conique, rencontre l'axe focal.

Soient F le foyer et M, M′ deux points de la conique;



du centre F et du rayon r décrivons un cercle qui rencontre FM en m et FM′ en m'; joignons F au milieu N de MM′: cette droite FN coupe mm' en n; enfin du point n abaissons sur MM′ la perpendiculaire nP qui coupe en E l'axe focal: il s'agit de calculer FE.

Le triangle FnE donne

$$\mathrm{FE} = \mathrm{F}n \frac{\sin \mathrm{F}n\mathrm{E}}{\sin n\mathrm{EF}};$$

mais soit N l'angle aigu PNF, on a

$$\sin \mathrm{F}n\mathrm{E} = \cos \mathrm{N},$$

et soit I le point où MM′ coupe l'axe focal,

$$\sin n\,\mathrm{EF} = \cos \mathrm{I}.$$

Ainsi

$$\mathrm{FE} = \frac{\mathrm{F}n . \cos \mathrm{N}}{\cos \mathrm{I}}.$$

La courbe étant rapportée à ses coordonnées polaires, on pose

$$\mathrm{FM} = \rho, \quad \mathrm{FM}' = \rho', \quad \mathrm{MFE} = \omega, \quad \mathrm{M'FE} = \omega',$$

et, par conséquent,

$$\mathrm{MFM}' = \omega' - \omega;$$

on a d'ailleurs les relations

$$\rho = \frac{p}{1 - e\cos\omega}, \quad \rho' = \frac{p}{1 - e\cos\omega'}.$$

Si l'on cherche à déterminer en général l'angle que font la base et la médiane d'un triangle, on aura

$$\cos \mathrm{N} = \frac{\rho^2 - \rho'^2}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2 + 2\rho\rho'\cos(\omega' - \omega)} . \sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho'\cos(\omega' - \omega)}}.$$

Ensuite, pour calculer Fn, nous observerons que si, dans un triangle isocèle, on joint le sommet n à un point quelconque de la base, on a la relation

$$\overline{\mathrm{F}n}^2 = r^2 - mn . m'n.$$

Un autre théorème de géométrie fait voir que la base MM′ étant divisée en deux parties égales au point N, la corde mm' est divisée en raison inverse des côtés FM et FM′, de sorte que

$$\frac{mn}{m'n} = \frac{\rho'}{\rho},$$

d'où l'on conclut

$$m'n = \frac{mm'.\rho}{\rho + \rho'}, \quad mn = \frac{mm'.\rho'}{\rho + \rho'},$$

et enfin

$$mn.\, m'n = \frac{\overline{mm'}^2\, \rho\rho'}{(\rho + \rho')^2}.$$

Mais, dans le cercle de rayon r, la corde

$$mm' = 2r \sin\frac{1}{2}(\omega' - \omega),$$

ce qui donne

$$\mathrm{F}n = r^2 \left[1 - \frac{4\rho\rho' \sin^2\frac{1}{2}(\omega' - \omega)}{(\rho + \rho')^2} \right]$$

ou bien

$$\mathrm{F}n = \frac{r\sqrt{\rho' + \rho'^2 + 2\rho\rho' \cos(\omega' - \omega)}}{\rho + \rho'},$$

et l'on a pour première simplification

$$\mathrm{FE} = \frac{r(\rho - \rho')}{\cos \mathrm{I} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\omega' - \omega)}}.$$

Il faut actuellement calculer cos I. Le triangle FIM nous donne

$$\frac{\mathrm{FI}}{\rho} = \frac{\sin \mathrm{FMI}}{\sin \mathrm{I}} = \frac{\sin(\mathrm{I} + \omega)}{\sin \mathrm{I}} = \cos\omega + \sin\omega \cot \mathrm{I}.$$

De même

$$\frac{\mathrm{FI}}{\rho'} = \cos\omega' + \sin\omega' \cot \mathrm{I},$$

d'où l'on tire

$$\frac{\rho'}{\rho} = \frac{\cos\omega + \sin\omega \cot \mathrm{I}}{\cos\omega' + \sin\omega' \cot \mathrm{I}} = \frac{1 - e\cos\omega}{1 - e\cos\omega'}.$$

On en déduit

$$\tang \mathrm{I} = \frac{\sin\omega' - \sin\omega - e\sin(\omega' - \omega)}{\cos\omega - \cos\omega'}$$

$$= \frac{\cos\frac{1}{2}(\omega' + \omega) - e\cos\frac{1}{2}(\omega' - \omega)}{\sin\frac{1}{2}(\omega' - \omega)}$$

et

$$\frac{1}{\cos \mathrm{I}} = \frac{\sqrt{1 - 2e\cos\frac{1}{2}(\omega' + \omega)\cos\frac{1}{2}(\omega' - \omega) + e^2\cos^2\frac{1}{2}(\omega' - \omega)}}{\sin\frac{1}{2}(\omega' + \omega)}.$$

Cherchons à comparer cette valeur avec l'expression

$$\sqrt{\rho + \rho'^2 - 2\rho\rho'\cos\frac{1}{2}(\omega' - \omega)} = \sqrt{(\rho - \rho')^2 + 4\rho\rho'\sin^2\frac{1}{2}(\omega' - \omega)}.$$

Remplaçant ρ et ρ' par leurs valeurs et réduisant, cette expression devient

$$\frac{2p\sin\frac{1}{2}(\omega' - \omega)}{(1 - e\cos\omega)(1 - e\cos\omega')}\sqrt{1 - 2e\cos\frac{1}{2}(\omega' + \omega)\cos\frac{1}{2}(\omega' - \omega) + e^2\cos^2\frac{1}{2}(\omega' - \omega)},$$

ce qui donne

$$\mathrm{FE} = \frac{r(\rho - \rho')(1 - e\cos\omega)(1 - e\cos\omega')}{2p\sin\frac{1}{2}(\omega' - \omega)\sin\frac{1}{2}(\omega' - \omega)}.$$

Remplaçant encore ρ et ρ' par leurs valeurs, on a enfin

$$\mathrm{FE} = re. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Il reste encore à faire voir que, si l'on prolonge mE jusqu'à une seconde rencontre du cercle en H, on aura la relation

$$\frac{mE}{HE} = \frac{MF'}{MF},$$

F′ étant le second foyer.

D'abord nous connaissons dans le triangle mEF,

$$\overline{mE}^2 = r^2(1 + e^2 - 2e\cos\omega).$$

Nous connaissons aussi le produit mE.HE qui est égal au produit des parties du diamètre dirigé suivant EF; ces deux parties sont $r - re$ et $r + re$, donc on a

$$me.HE = r^2(1 - e^2)$$

et

$$\frac{mE}{HE} = \frac{\overline{mE}^2}{r^2(1 - e^2)} = \frac{1 + e^2 - 2e\cos\omega}{1 - e^2}.$$

Il faut donc prouver que

$$MF' = \rho.\frac{1 + e^2 - 2e\cos\omega}{1 - e^2}$$

est effectivement égal à $2a - \rho$, c'est-à-dire au rayon vecteur correspondant. On peut mettre le numérateur sous la forme

$$2 - 2e\cos\omega + e^2 - 1 = \frac{2p}{\rho} - (1 - e^2),$$

d'où

$$MF' = \frac{2p}{1 - e} - \rho.$$

Or

$$p = \frac{b^2}{a} = a - \frac{c^2}{a} = a - ae^2,$$

d'où

$$a = \frac{p}{1 - e^2},$$

et l'on trouve en effet

$$MF' = 2a - \rho.$$

La démonstration est faite pour l'ellipse, mais elle serait aussi facile pour l'hyperbole.

Quant à la parabole, le point E est sur la circonférence puisque $e = 1$.

La courbe est maintenant parfaitement définie; en effet la somme $MF' + MF$ donne la quantité $2a$, et le rapport connu

$$FE = r\,\frac{c}{a}$$

achève de tout déterminer. On voit donc que, si du centre M et du rayon MF' que l'on vient de trouver, on décrivait une circonférence coupant l'axe focal en deux points, l'une des solutions serait fausse.

Cependant, on sait que le problème a quatre solutions; l'une peut être, suivant les circonstances, une ellipse, ou une parabole, ou bien une hyperbole dans laquelle les trois points donnés sont sur une même branche. Les trois autres sont trois hyperboles dans lesquelles deux des points donnés sont sur une branche et le troisième sur l'autre. Voici comment ces solutions peuvent se déduire de la construction précédente.

Nous avons supposé jusqu'à présent que les points M et m étaient du même côté des points F; mais nous aurions pu prendre, au lieu de m, l'autre extrémité du diamètre. En considérant de même les autres points M′ et M″ de la conique, nous aurons enfin les trois autres points m_1, m'_1 et m''_1 que l'on peut combiner entre eux ou avec les extrémités opposées m, m' et m''.

Si l'on cherche à combiner ensemble m_1, m'_1 et m''_1, on trouve un point E_1 placé sur le même axe FE à une distance $FE_1 = FE$; il est alors facile de voir que l'on retombe sur la courbe qu'on a déjà obtenue.

Mais les trois combinaisons suivantes :

$$(m_1,\ m',\ m''),\quad (m'_1,\ m,\ m''),\quad (m''_1,\ m,\ m')$$

donnent les trois hyperboles indiquées.

Quant aux trois autres combinaisons :

$$(m,\ m'_1,\ m''_1),\quad (m',\ m_1,\ m''_1),\quad (m'',\ m,\ m'_1),$$

elles donneraient encore ces trois mêmes hyperboles.

Le theorème de Nicollic présente plusieurs conséquences. D'abord, on en conclut, indépendamment de toutes considérations de coniques, que si, sur trois points M, M′, M″, on fait, avec un quatrième point F et un cercle de rayon quelconque, la construction indiquée, les trois perpendiculaires qu'elle donne se réuniront en un même point.

De plus, si deux des trois points pris sur la conique se réunissent en un seul, la sécante deviendra tangente, mais le point E ne changera pas et l'on aura toujours

$$FE = re.$$

On pourra donc réciproquement, en supposant la conique donnée, profiter de cette propriété pour mener une tangente par un point donné sur la courbe.

Considérons d'abord l'ellipse, et comme le rayon du cercle est arbitraire, nous prendrons pour rayon

$$FB = OA = a,$$

O étant le centre et B l'extrémité du petit axe : alors

$$FE = r\frac{c}{a} = c,$$

d'où résulte la construction suivante :

Pour mener une tangente à l'ellipse par un point M *pris sur cette courbe, joignez* M *au foyer; de ce foyer comme centre, et avec* FB = OA *comme rayon, décrivez une circonférence qui rencontre* FM *en* m ; *joignez* Om *et sur* Om *abaissez du point* M *une perpendiculaire qui sera la tangente demandée.*

Les points M et *m* sont du même côté du foyer. Pour l'hyperbole, la construction est la même, seulement les points M et *m* sont des côtés opposés du foyer.

Quant à la parabole, *du foyer* F *comme centre, et d'un rayon quelconque, décrivez un cercle qui coupe l'axe en* E *du côté opposé à la directrice et le rayon vecteur* FM *en* m; *joignez* Em, *et sur* Em *abaissez du point* M *une perpendiculaire qui sera tangente.*

Ici, comme pour l'ellipse, M et *m* sont du même côté de F.