NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

F. AMORETTI

Sur la fraction continue $\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\ldots}}}}$

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 14 (1855), p. 40-44

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1855_1_14__40_1>

SUR LA FRACTION CONTINUE

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\ldots}}}};$$

PAR M. F. AMORETTI,
Élève du Lycée de Versailles (*).

Travaillant sur la fraction continue que l'on doit à Brounker, pour représenter π, j'ai été conduit à me demander ce que pouvait représenter la fraction

$$u = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3}\cdots}}$$

Après quelques recherches inutiles, j'ai trouvé dans les Notes à la *Géométrie* de Legendre un passage qui se rapportait à ma question; je copie textuellement (Note IV, page 289 de la 14e édition).

« Considérons la suite infinie :

$$\varphi(z) = 1 + \frac{a}{z} + \frac{1}{1.2}\cdot\frac{a^2}{z(z+1)} + \frac{1}{1.2.3}\cdot\frac{a^3}{z(z+1)(z+2)} + \ldots,$$

(*) Lauréat de 1854.

dont le terme général est

$$\frac{1}{1.2.3\ldots n}\cdot\frac{a^n}{z(z+1)\ldots(z+n-1)}.$$

Si l'on remplace z par $z+1$ dans $\varphi(z)$ et qu'on retranche, on aura

$$\varphi(z+1)=1+\frac{a}{z+1}+\frac{a^2}{(z+1)(z+2)}+\ldots,$$

et

$$-\varphi(z+1)+\varphi(z)=\frac{a}{z(z+1)}+\frac{a^2}{z(z+1)(z+2)}+\ldots,$$

$$\varphi(z)-\varphi(z+1)=\frac{a}{z(z+1)}\left[1+\frac{a}{z+2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2}{(z+2)(z+3)}+\ldots\right].$$

» Dans la série entre crochets, on reconnaît $\varphi(z+2)$, on a donc

$$\varphi(z)-\varphi(z+1)=\frac{a}{z(z+1)}\varphi(z+2).$$

Divisons par $\varphi(z+1)$, et posons

$$\frac{a}{z}\cdot\frac{\varphi(z+1)}{\varphi(z)}=f(z),$$

on aura

$$f(z)=\frac{a}{z+f(z+1)}.$$

Mettant successivement $z+1$, $z+2$, à la place de z, et mettant sa valeur pour $f(z+1)$ dans $f(z)$, pour $f(z+2)$ dans $f(z+1)$, etc., on obtient

$$f(z)=\cfrac{a}{z+\cfrac{a}{z+1+\cfrac{a}{z+2+\cfrac{a}{z+3}\cdots}}}$$

» Posant (*)

$$a=z=1,$$

(*) Ce dernier alinéa n'est pas dans Legendre. TM.

on obtient

$$f(1) = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4}}}} = u. »$$

[C'est ici que commence le travail qui m'est propre.]

On a

$$f(z) = \frac{a}{z} \cdot \frac{1 + \frac{a}{z+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{(z+1)(z+2)} + \dots}{1 + \frac{a}{z} + \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{z(z+1)} + \dots};$$

faisant $z = a = 1$,

$$u = \frac{1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2} \cdot \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3} \cdot \frac{1}{1.2.3.4} + \dots}{1 + \frac{1}{1} + \left(\frac{1}{1.2}\right)^2 + \left(\frac{1}{1.2.3}\right)^2 + \dots}.$$

Il s'agit de sommer les suites des deux termes. Posons

$$(1) \qquad \psi(x) = x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1^2.2^2.3} + \frac{x^4}{1^2.2^2.3^2.4} + \dots$$

Différentiant les deux membres,

$$(2) \qquad \frac{d\psi}{dx} = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1^2.2^2} + \frac{x^3}{1^2.2^2.3^2} + \dots,$$

et divisant membre à membre,

$$\frac{\psi\, dx}{d\psi} = \frac{x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1^2.2^2.3} + \dots}{1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1^2.2^2} + \dots}.$$

On voit maintenant que u n'est autre chose que ce que devient la fonction $\frac{\psi\, dx}{d\psi}$, quand on y fait $x = 1$; il ne reste donc plus qu'à trouver la nature de la fonction ψ, qui se développe suivant la série (1), ou seulement la nature de sa dérivée que je désigne par t et qui se développe suivant la série (2),

$$t = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1^2.2^2} + \frac{x^3}{1^2.2^2.3^2} + \ldots.$$

Différentiant les deux membres,

$$\frac{dt}{dx} = 1 + \frac{x}{1^2.2} + \frac{x^2}{1^2.2^2.3} + \frac{x^3}{1^2.2^2.3^2.4} + \ldots;$$

multipliant par x et différentiant de nouveau,

$$\frac{xdt}{dx} = x + \frac{x^2}{1^2.2} + \frac{x^3}{1^2.2^2.3} + \ldots;$$

d'où

$$d\left(\frac{xdt}{dx}\right) = \left(1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1^2.2^2} + \frac{x^3}{1^2.2^2.3^2} + \ldots\right) dx.$$

Mais la série du second membre est précisément celle dont t désigne la somme : par suite, la sommation de cette série est rappelée à l'intégration de l'équation du second ordre,

$$d\left(\frac{xdt}{dx}\right) = tdx.$$

Faisons

$$tdx = dy,$$

d'où

$$t = \frac{dy}{dx}, \quad \text{et} \quad \frac{xdt}{dx} = \frac{xd^2y}{dx^2};$$

nous aurons, en substituant,

$$d\left(x\frac{d^2y}{dx^2}\right) = dy,$$

et en intégrant,

$$\frac{xd^2y}{dx^2} = y + A;$$

A désignant la constante arbitraire.

On donnera une forme plus simple à l'équation en posant

$$y + A = p, \quad \text{d'où} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2p}{dx^2},$$

et, en substituant,

$$\frac{xd^2p}{dx^2} = p. \tag{3}$$

Nous ramènerons cette équation au premier ordre en posant $p = e^{\int v dx}$, v étant une autre fonction de x, car on a

$$dp = e^{\int v dx}.\, v dx, \quad d^2p = dx\,(pdv + v^2 p dx),$$

on trouve, en reportant cette dernière expression dans l'équation (3) et supprimant le facteur p,

$$\frac{dv}{dx} + v^2 - x^{-1} = 0;$$

cas particulier de l'équation de Riccati.

Versailles, 24 octobre 1854.

(La Note suivante a été communiquée par M. Herlobig, chef de l'institution Saint-Louis, à Versailles, neveu et successeur de M. Potin.)

Émile-Michel Amoretti est né à Moscou, le 1er juin 1838, de parents piémontais. Son père naquit à Nice alors que le Piémont, sous le nom d'Alpes-Maritimes, appartenait à la France. En 1830, sa famille quitta Nice, où elle avait été malheureuse, pour aller chercher fortune en Russie.

E. Amoretti dès son enfance aimait l'étude. Son père fit un dernier sacrifice et l'amena en France en 1849, le confia d'abord aux soins de M. Tanquerel, maître de pension à Saint-Germain, puis, peu de temps après, à ceux de M. Potin, chef de l'institution Saint-Louis, à Versailles. Son nouveau maître reconnut bientôt toutes les