NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. GAUCHEREL

Note sur la forme préférable des triangles géodésiques

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 14 (1855), p. 321-343

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1855_1_14__321_0>

NOTE

Sur la forme préférable des triangles géodésiques;

PAR M. E. GAUCHEREL,
Capitaine sous-directeur des études a l'École impériale spéciale Militaire.

La forme préférable des triangles géodésiques est la forme équilatérale, parce que le triangle équilatéral présente l'avantage de conserver les mêmes longueurs aux côtés et d'embrasser la plus grande surface avec le moindre nombre de triangles.

On a voulu prouver que l'analyse confirmait ce principe, et, dans le *Traité de Géodésie* de Puissant, on trouve une démonstration qui a été jusqu'à présent admise dans l'enseignement.

La question est ainsi posée : une base b d'un triangle ABC est mesurée exactement, les deux angles A et B comportent une même erreur dA. Pour quelle forme de triangle l'erreur qui en résulte sur les côtés sera-t-elle un minimum?

On suppose que l'erreur se produit d'abord dans le même sens sur les deux angles, et on est conduit à l'expression

$$da = a\,dA\,(\cot A - \cot B).$$

On en déduit que da est un minimum pour $A = B$, et que le même calcul appliqué au côté c donne le minimum de dc pour $C = B$.

Ces deux conclusions ne sont pas exactes. En effet : 1° ce n'est pas le minimum de l'erreur absolue da qui a lieu pour $A = B$, c'est le minimum de l'erreur relative

$\frac{da}{a}$; 2° en conservant les mêmes hypothèses sur les variations de A et de B, on n'arrive pas à l'expression

$$dc = c.dA\,(\cot C - \cot B),$$

puisqu'on ne peut pas supposer que la variation des trois angles est de même signe, les trois erreurs angulaires étant assujetties à la relation

$$dA + dB + dC = 0.$$

Après avoir supposé que l'erreur dA est de même signe sur les deux angles A et B, on suppose qu'elle est de signes contraires. On est conduit alors à l'expression

$$da = \pm a.dA \frac{2 \sin C}{\cos(A - B) + \cos C}:$$

d'où l'on conclut que l'erreur da est la plus petite possible pour $A = B$. Comme précédemment, cette conclusion ne peut pas s'appliquer à l'erreur absolue da. De plus, elle n'est vraie que pour une valeur constante de C; elle établit donc seulement une comparaison entre les différents triangles ayant même base b et même angle C. J'ai émis la même opinion dans un Mémoire présenté à l'Académie des Sciences, dans sa séance du 25 février 1850.

En résumé, cette démonstration ne prouve pas que le triangle équilatéral soit celui de tous les triangles construits sur une même base pour lequel l'erreur absolue ou l'erreur relative sur les côtés est la plus petite possible. Il faut donc regretter qu'une pareille démonstration se soit glissée dans le bel ouvrage de Puissant, et s'étonner qu'elle se soit maintenue aussi longtemps dans l'enseignement.

M. le commandant Salneuve, dont l'ouvrage est adopté pour l'enseignement de la topographie et de la géodésie à l'École impériale d'État-major, se contentait, dans sa première édition, de reproduire à peu de choses près la première partie de la démonstration précédente.

Dans la seconde édition, l'auteur traite la question d'une manière plus complète, mais l'erreur déjà signalée et relative aux signes des variations angulaires se reproduit également dans cette nouvelle démonstration.

La conclusion de l'auteur est celle-ci : *Au point de vue théorique, c'est le triangle équilatéral qui est le meilleur, lorsque les erreurs angulaires sont de même signe; c'est le triangle isocèle rectangle, quand ces erreurs sont de signes contraires. Mais il est impossible, dans la pratique, de se soumettre à ces prescriptions....*

Voici donc un professeur distingué conduit à reconnaître que le triangle équilatéral est le meilleur, non pas parce qu'il est toujours le plus exactement déterminé, mais quoiqu'il ne jouisse pas de cette propriété. C'est ainsi que j'avais formulé une des conséquences du Mémoire cité ci-dessus.

M. le commandant Testu, dans son *Traité de Topographie et de Géodésie*, et M. le commandant Livet, dans le cours de géodésie qu'il faisait à l'Ecole d'Application de Metz, donnent la démonstation telle qu'elle se trouve dans l'ouvrage de Puissant.

A l'Ecole impériale spéciale Militaire, la même proposition est démontrée sans le secours de l'analyse et par cette seule considération, que chacun des angles doit se rapprocher autant que possible de l'angle droit. Or il n'est pas exact d'appliquer aux angles à la base ce qui ne peut se démontrer que pour l'angle au sommet.

Dans son ouvrage sur les approximations numériques, M. Vieille cherche l'erreur relative sur un côté; il arrive à l'expression

$$\frac{da}{a} = dA(\cot A - \cot B).$$

Il peut donc dire que le minimum de cette expression a lieu pour $A = B$; mais son raisonnement n'est plus exact quand il ajoute qu'on trouverait de même

$$\frac{dc}{c} = dC(\cot C - \cot B).$$

Le 25 février 1850, j'eus l'honneur de remettre à M. Arago un Mémoire dans la première partie duquel j'établissais que la démonstration donnée dans l'ouvrage de Puissant n'était pas exacte; je proposais, dans la seconde, d'envisager la question sous un autre point de vue. Le Mémoire fut présenté le même jour.

Dans la séance du 15 avril suivant, M. le colonel Hossard présentait un Mémoire dans lequel il se proposait de démontrer que le triangle équilatéral donne les meilleures conditions d'exactitude. Dans les séances des 27 mai et 3 juin, M. Hossard adressait une modification et un supplément à son premier travail, et publiait à la même époque deux petites brochures extraites des Mémoires soumis à l'Académie.

La même année, dans les numéros de mai et de juin des *Nouvelles Annales de Mathématiques*, M. le général Piobert publiait un travail sur la forme préférable des triangles géodésiques. Enfin, dans la séance du 5 août, le savant général lisait sur le même sujet une Note que l'on trouve en entier dans le *Compte rendu* de la séance.

Je me propose de donner en quelques mots les conclusions des travaux de MM. Hossard et Piobert, sans entrer dans le détail des calculs, sans suivre même la marche des raisonnements.

M. Hossard dit en débutant : *L'erreur sur un côté provenant des erreurs angulaires sera exprimée par le rapport de la variation absolue de ce côté à sa longueur.*

De même, l'erreur sur la position d'un point déterminé aura pour expression le quotient du déplacement absolu de ce point par la distance au point de départ.

C'est ce quotient ou déplacement relatif qu'il importe de rendre le moindre possible.

Je ne comprends pas pourquoi le déplacement du sommet est rapporté au point de départ, ni pourquoi l'auteur dit plus tard que ce point de départ est l'extrémité la plus rapprochée de la base.

Dans la détermination d'un point géodésique, ce sera le déplacement absolu de ce point que je m'attacherai à rendre le moindre possible, et je crois être dans le vrai.

En effet, un canevas géodésique se résume dans les coordonnées des différents sommets des triangles, et les coordonnées les plus exactes correspondront évidemment aux points dont les déplacements absolus seront les moindres. Tout ce qu'on peut dire en dehors de ce principe peut faire l'objet de Mémoires fort intéressants, mais ne doit pas trouver place dans l'enseignement. Quoi qu'il en soit, en suivant le raisonnement de l'auteur on arrive à cette conclusion : *Lorsque les observations portent sur les trois angles, le triangle équilatéral est celui pour lequel la plus grande erreur à craindre sur la position du sommet est la moindre possible.*

J'ajoute qu'il est question ici de l'erreur relative, c'est-à-dire du rapport du déplacement absolu du sommet à la longueur du plus petit des deux côtés adjacents à ce sommet.

M. le colonel Hossard examine ensuite le cas où les deux angles à la base sont seuls observés, et arrive à cette conclusion, que le triangle rectangle isocèle est celui pour lequel l'erreur relative sur la position du point est la moindre possible.

Puis vient la recherche du déplacement absolu dans le cas du triangle isocèle; la conclusion est que le triangle à préférer serait le triangle isocèle rectangle au sommet.

M. le colonel Hossard fait enfin remarquer que si, au lieu de chercher le déplacement relatif par rapport à l'un des côtés, on eût cherché le déplacement relatif par rapport à la hauteur, *on serait encore arrivé au même résultat que précédemment, à savoir, que lorsque les trois angles sont observés, la forme équilatérale est celle qui donne lieu au minimum des plus grandes erreurs.*

Toutefois, il semble, ajoute l'auteur, *que l'erreur doit être exprimée en fonction de la distance du sommet du triangle au point le plus voisin de la base pris comme point de départ, plutôt qu'en fonction de la hauteur du triangle.*

Je ne trouve pas cette opinion assez motivée, et le déplacement relatif à la hauteur du triangle aurait pour moi plus de signification que celui qui a été plus particulièrement étudié par M. Hossard.

Dans la seconde brochure, M. Hossard cherche le triangle pour lequel l'erreur moyenne est un minimum; mais ici la discussion me paraît devenir plus spéculative qu'utile, et je ne suivrai pas l'auteur sur ce terrain. Je constate seulement que cette nouvelle considération conduit à conclure que le triangle préférable est compris entre le triangle rectangle et le triangle équilatéral.

Je termine ce résumé succinct en témoignant la vive impatience que j'éprouve de savoir comment M. le colonel Hossard, nommé récemment professeur de géodésie à l'École Polytechnique, fera la leçon sur cette matière.

Si je veux maintenant examiner le travail de M. le général Piobert sur le même sujet, je ne considérerai que la Note contenue dans le *Compte rendu* de la séance du 5 août 1850. Cette Note, qui résume les précédentes, est une discussion extrêmement remarquable de la question.

Le savant général insiste sur l'avantage de rapporter la déformation des triangles soit à la hauteur, soit à la longueur des côtés, et cherche le minimum de cette déformation, soit pour la moyenne des plus grandes déformations dans les deux sens, soit pour la plus grande déformation dans les deux sens, soit pour le produit des plus grandes déformations dans les deux sens, soit pour l'aire de l'espace dans lequel le sommet du triangle peut errer, soit pour le rapport de cette aire à celle du triangle, soit pour la déformation en hauteur, soit enfin pour la déformation latérale. L'auteur détermine la valeur des angles des triangles préférables, suivant que l'on pose l'une ou l'autre des conditions énumérées ci-dessus.

Je répéterai, à cet égard, ce que j'ai dit précédemment : qu'il me semble beaucoup plus rationnel, beaucoup plus simple et beaucoup plus utile d'établir la discussion sur le déplacement absolu du sommet.

Je me propose maintenant d'étudier la même question en me plaçant à un point de vue différent de celui des auteurs qui l'ont précédemment traitée.

Je pars de ce principe, que la forme préférable des triangles géodésiques est la forme équilatérale, parce que le triangle équilatéral présente l'avantage de conserver les mêmes longueurs aux côtés et d'embrasser la plus grande surface avec le moindre nombre de triangles ; mais je ne chercherai pas à démontrer par l'analyse que le triangle équilatéral est celui qui, pris isolément, détermine le plus exactement son sommet, car je serais conduit à un tout autre résultat.

Ce que je demanderai à l'analyse ce sera :

1°. De donner la limite de l'erreur possible sur la position du sommet d'un triangle lorsque l'on connaît la base, les angles et l'erreur angulaire que comportent ces angles;

2°. D'indiquer de combien on peut s'écarter du triangle équilatéral sans encourir sur la position du sommet une erreur plus grande que la limite assignée;

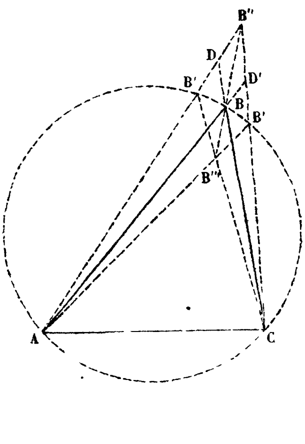
3°. De donner la plus grande dimension de la base à laquelle on pourra rattacher un sommet avec une approximation donnée;

4°. De donner l'approximation qu'on doit obtenir dans les mesures d'angles pour que le sommet du triangle s'appuyant sur une base donnée, soit déterminé avec une approximation donnée.

Comme il n'est pas possible de suivre l'enchaînement des erreurs que comportent les opérations successives d'un canevas, on aura satisfait aux conditions d'un bon travail en imposant une limite d'erreurs très-étroite aux différentes parties de ce travail. Je n'aurai donc à m'occuper que des conditions d'exactitude dans la détermination d'un point qu'on veut rattacher à une base.

Je dois commencer par chercher la relation qui existe entre les différents éléments que je veux combiner.

Soit AC une base exactement mesurée; on veut ratta-



cher le point B à cette base. Les deux angles A et C ont été mesurés et comportent une même erreur α, quelle est la relation qui existe entre la base b, l'angle au sommet B, les angles à la base A et C, l'erreur angulaire α et D le plus grand déplacement possible du sommet?

L'erreur angulaire α sera toujours supposée assez petite pour pouvoir être négligée devant les plus petits angles qui peuvent entrer dans un triangle géodésique.

Si l'erreur α se produit en sens inverse sur les deux angles A et C, le sommet viendra en B' sur la circonférence CBA, et l'on aura

$$\mathrm{BB}' = \frac{c \sin\alpha}{\sin \mathrm{C}} = \frac{b \sin\alpha}{\sin \mathrm{B}}.$$

Le sommet viendra en B'', si l'erreur se produit en augmentation sur les deux angles; en B''', si elle se produit en diminution.

Dans le triangle différentiel ABD, on a

$$\mathrm{BD} = \frac{c \sin\alpha}{\sin(\mathrm{B} - \alpha)} = \frac{c \sin\alpha}{\sin \mathrm{B}};$$

de même

$$\mathrm{BD}' = \frac{a \sin\alpha}{\sin \mathrm{B}};$$

B''D ne diffère de BD' que d'une quantité très-petite du second ordre, et l'on peut poser

$$\mathrm{B}''\mathrm{D} = \frac{a \sin\alpha}{\sin \mathrm{B}}.$$

Mais

$$\mathrm{BB}'' = \sqrt{\mathrm{BD}^2 + \mathrm{B}''\mathrm{D}^2 + 2\mathrm{BD}.\mathrm{BD}''\cos(\mathrm{B} - \alpha)};$$

donc

$$\mathrm{BB}'' = \frac{\sin\alpha}{\sin \mathrm{B}}\sqrt{c^2 + a^2 + 2ac\cos \mathrm{B}}$$

On a

$$c = \frac{b \sin C}{\sin B}, \quad a = \frac{b \sin A}{\sin B};$$

donc

$$BB'' = \frac{b \sin \alpha}{\sin^2 B} \sqrt{\sin^2 C + \sin^2 A + 2 \sin A . \sin C \cos B};$$

expression qui peut se mettre sous la forme

$$BB'' = \frac{b \sin \alpha}{\sin^2 B} \sqrt{\sin^2 B + 4 \sin A \sin C \cos B},$$

ou sous la forme

$$BB'' = \frac{b \sin \alpha}{\sin B} \sqrt{\sin^2 A + \left(\cos A + \frac{2 \sin A \cos B}{\sin B}\right)^2},$$

BB''' est sensiblement égale à BB''. La valeur trouvée pour BB'' est d'ailleurs l'expression rigoureusement exacte du déplacement BB'''. On trouverait, pour l'expression exacte de BB'',

$$BB'' = \frac{b \sin \alpha}{\sin B} \sqrt{\sin^2 A + \left[\cos A + \frac{2 \sin (A + \alpha) \cos (B - \alpha)}{\sin (B - 2\alpha)}\right]^2}.$$

Pour avoir le plus grand déplacement possible, il faut donc chercher quelle est, suivant la forme du triangle, la plus grande des deux valeurs de ce déplacement :

$$BB' = \frac{b \sin \alpha}{\sin B},$$

$$BB'' = \frac{b \sin \alpha}{\sin B} \sqrt{\sin^2 A + \left(\cos A + \frac{2 \sin A \cos B}{\sin B}\right)^2}.$$

Or, pour $B < 100$ grades, on a

$$BB'' > BB',$$

pour $B = 100$ grades,

$$BB'' = BB',$$

et pour $B > 100$ grades,

$$BB'' < BB'.$$

Donc, lorsque nous voudrons imposer une limite à l'erreur possible sur la position du sommet, il faudra considérer BB'' si l'angle au sommet est aigu, et BB' s'il est obtus.

Supposons maintenant $B < 100$ grades et discutons la valeur de BB'':

$$BB'' = \frac{b \sin \alpha}{\sin B} \sqrt{\sin^2 A + \left(\cos A + \frac{2 \sin A \cos B}{\sin B}\right)^2}.$$

On voit que pour une même valeur de A, BB'' augmente indéfiniment lorsque B diminue depuis 100 grades jusqu'à zéro. La plus petite valeur de BB'' que nous devons considérer est donc celle qui correspond à

$$B = 100^g,$$

d'où

$$BB'' = b \sin \alpha.$$

Au delà, c'est-à-dire pour $B > 100$ grades, il faut prendre la valeur de BB'.

L'expression

$$BB'' = \frac{b \sin \alpha}{\sin^2 B} \sqrt{\sin^2 B + 4 \sin A \sin C \cos B}$$

montre que, pour une même valeur de $B < 100$ grades, le maximum du déplacement a lieu pour le maximum du produit $\sin A \sin C$, c'est-à-dire pour $A = C$. Donc, de tous les triangles qui ont même base et même angle aigu au sommet, celui qui donne le plus grand déplacement absolu du sommet est le triangle isocèle.

Pour $A = C$, on a

$$BB'' = \frac{b \sin \alpha}{\sin^2 B} \sqrt{\sin^2 B + 4 \sin^2 A \cos B}$$

qui se met sous la forme

$$BB'' = \frac{b \sin \alpha}{2 \sin^2 \frac{1}{2} B},$$

expression qui donne le plus grand déplacement correspondant à une valeur de B plus petite que l'angle droit; elle prouve en outre que, de tous les triangles isocèles qui s'appuient sur une même base, le triangle rectangle est celui dont le sommet est le moins déplacé par les erreurs commises dans la mesure des angles à la base.

Pour $A = B = C$, l'expression BB'' devient

$$BB'' = 2 b \sin \alpha.$$

Donc le déplacement absolu du sommet d'un triangle équilatéral est double de celui du sommet d'un triangle rectangle isocèle s'appuyant sur la même base.

Pour des valeurs de B plus grandes que 100 grades, il faut discuter l'expression

$$BB' = \frac{b \sin \alpha}{\sin B}.$$

Cette expression, indépendante des angles à la base, montre que le plus grand déplacement possible est le même pour tous les triangles qui ont même angle au sommet; elle montre également que le déplacement augmente lorsque l'angle B augmente depuis 100 grades jusqu'à 200 grades.

Nous pouvons maintenant résoudre les quatre questions que nous nous sommes posées dès le principe.

1°. La limite de l'erreur possible sur la position du sommet d'un triangle est donnée par l'expression

$$E = \frac{b \sin \alpha}{2 \sin^2 \frac{1}{2} B}$$

si l'angle B est aigu, et par

$$E = \frac{b \sin \alpha}{\sin B}$$

si l'angle B est obtus. Nous remarquerons que ces valeurs de E sont proportionnelles à b et à α.

2°. Si la limite E du déplacement est donnée ainsi que B et α, on trouve deux limites pour l'angle B :

$$\sin \frac{1}{2} B = \sqrt{\frac{b \sin \alpha}{2E}}$$

donne la limite des angles aigus, et

$$\sin B = \frac{b \sin \alpha}{E}$$

la limite des angles obtus.

3°. On connaît α et E, on demande la plus grande base à laquelle on puisse rattacher un sommet. Cette base correspondra à un triangle rectangle au sommet; nous prendrons donc

$$E = b \sin \alpha,$$

d'où

$$b = \frac{E}{\sin \alpha},$$

expression de la limite des bases.

4°. Si E, b et B sont donnés, on trouve, pour les limites de α,

$$\sin\alpha = \frac{2\,\mathrm{E}\sin^2\frac{1}{2}\mathrm{B}}{b}$$

si B est aigu, et

$$\sin\alpha = \frac{\mathrm{E}\sin\mathrm{B}}{b}$$

si B est obtus.

Nous avons supposé que les deux angles à la base étaient seuls mesurés, mais il n'en est pas toujours ainsi. Dans les réseaux géodésiques du premier ordre, on mesure les trois angles à 1 ou 2 secondes près; dans la géodésie du second ordre, on mesure également les trois angles, mais on se contente d'une approximation de 10 à 20 secondes. Enfin, dans la géodésie du troisième ordre, on ne mesure que les deux angles à la base avec la même approximation de 10 à 20 secondes. En topographie, on ne mesure que deux angles qui sont le plus souvent les deux angles à la base; si l'on fait un canevas trigonométrique, le graphomètre donne les angles avec une approximation égale à 1 ou 2 minutes; avec la planchette, on peut admettre une approximation de 5 minutes; avec la boussole et le déclinatoire, une approximation de 25 minutes.

Revenons à la géodésie du premier et du second ordre, et voyons en quoi la mesure des trois angles peut nous obliger à modifier ce que nous avons dit dans le cas de la mesure des angles à la base.

Soit

$$\alpha = 3m;$$

les plus grands déplacements sont donnés par les combinaisons suivantes sur les angles observés :

$$\begin{array}{lll} A \pm 3m, & A \pm 3m, & A \pm 3m \\ B \pm 3m, & B \mp 3m, & B \mp 3m, \\ C \mp 3m, & C \pm 3m, & C \mp 3m, \end{array}$$

auxquels cas les angles réduits sont :

$$\begin{array}{lll} A \pm 2m, & A \pm 2m, & A \pm 4m, \\ B \pm 2m, & B \mp 4m, & B \mp 2m, \\ C \mp 4m, & C \pm 2m, & C \mp 2m. \end{array}$$

Si nous voulons discuter la valeur du déplacement dans le cas de ces suppositions sur les erreurs angulaires, nous dirons :

Soit da l'erreur produite sur le côté a par l'erreur angulaire m, on a

$$da = \frac{c \sin m}{\sin B};$$

on a de même

$$dc = \frac{a \sin m}{\sin B}.$$

La combinaison

$$A + 2m, \qquad C - 4m$$

donne un déplacement D qui est le troisième côté d'un triangle dont les deux autres, $2dc$ et $4da$, comprennent l'angle B. La combinaison

$$A - 2m, \qquad C + 4m$$

donne un déplacement qui ne diffère pas sensiblement du précédent.

De même le déplacement D′ donné par les deux combinaisons

$$A \pm 2m, \qquad C \pm 2m$$

est le troisième côté d'un triangle dont les deux autres, $2dc$ et $2da$, comprennent l'angle supplémentaire de l'angle B.

De même encore, le déplacement D″, donné par les deux combinaisons

$$A \pm 4m, \qquad C \mp 2m,$$

est le troisième côté d'un triangle dont les deux autres, $2da$ et $4dc$, comprennent l'angle B.

Nous tirons de là

$$D^2 = 4dc^2 + 16da^2 - 16\,da\,dc\cos B,$$
$$D'^2 = 4dc^2 + 4da^2 + 8\,da\,dc\cos B,$$
$$D''^2 = 4da^2 + 16dc^2 - 16\,da\,dc\cos B.$$

Enfin, le plus grand déplacement qui serait donné dans le cas de la mesure des angles à la base par les combinaisons

$$A \pm 3m, \qquad C \pm 3m,$$

peut être exprimé par

$$D'''^2 = 9da^2 + 9dc^2 + 18\,da\,dc\cos B.$$

Cherchant la plus grande de ces quatre expressions dans le cas de l'angle B aigu, nous voyons que D‴ est toujours plus grand que D′, et que si $a = c$, on a

$$D = D'';$$

si $a < c$, on a

$$da > dc \quad \text{et} \quad D > D'';$$

si $a > c$, on a

$$D < D''.$$

Donc, si nous supposons $a < c$, il faudra, pour trouver le plus grand déplacement, comparer D''' à D.

Nous avons

$$D'''^2 - D^2 = 5\,dc^2 - 7\,da^2 + 34\,da\,dc\cos B.$$

Donc, tant qu'on aura

$$7\,da^2 < 5\,dc^2 + 34\,da\,dc\cos B,$$

on aura

$$D''' > D.$$

De cette inégalité, on tire

$$\cos B > \frac{7\,da^2 - 5\,dc^2}{34\,da\,dc},$$

ou

$$\cos B > \frac{7\,c^2 - 5\,a^2}{34\,a.c},$$

ou enfin

$$\cos B > \frac{7 - 5\dfrac{a^2}{c^2}}{34\dfrac{a}{c}}.$$

La plus grande valeur de cette expression correspond à la plus petite valeur de $\frac{a}{c}$. Or, si nous supposons que les réseaux géodésiques ne comportent pas de triangles dans lesquels on ait $a < \frac{c}{2}$, nous pourrons prendre $\frac{1}{2}$ pour la plus petite valeur de $\frac{a}{c}$, auquel cas l'inégalité devient

$$\cos B > \frac{23}{136}, \quad \text{d'où} \quad B < 89^g.$$

Dans le cas de $A = C$, on aurait

$$\cos B > \frac{1}{17}, \quad \text{d'où} \quad B < 96^g.$$

Ces limites se rapprochent assez de l'angle droit pour qu'on puisse dire que lorsque l'angle au sommet est aigu, on a $D''' > D$. Donc les limites trouvées précédemment dans le cas de la mesure des angles à la base conviennent *a fortiori* au cas de la mesure des trois angles, lorsque l'angle au sommet est aigu.

Si l'angle B est obtus et si l'on suppose toujours $a < c$, la plus grande valeur du déplacement est encore D; mais on a

$$D'''^2 - D^2 = 5\,dc^2 - 7\,da^2 + 34\,da\,dc\cos B,$$

expression toujours négative pour $da > dc$ et $\cos B < 0$; par conséquent, $D > D'''$. Les limites trouvées pour les angles obtus dans le cas de la mesure des angles à la base ne conviennent donc plus au cas de la mesure des trois angles; il est alors nécessaire de les modifier, et on est conduit à le faire de la manière la plus simple en remarquant que les déplacements donnés par les combinaisons

$$A \pm 2m, \quad C \mp 4m$$

et

$$A \pm 4m, \quad C \mp 2m$$

sont toujours plus petits que ceux donnés par

$$A \pm 4m, \quad C \mp 4m.$$

Or ces derniers sont représentés par l'expression

$$\frac{b \sin \frac{4}{3}\alpha}{\sin B}:$$

donc les limites, dans le cas de la mesure des trois angles et de l'angle au sommet obtus, se déduisent de l'équation

$$E = \frac{b \sin \frac{4}{3} \alpha}{\sin B}.$$

Applications numériques.

1°. Quelle est la limite du déplacement du sommet d'un triangle équilatéral dont le côté est de 30000 mètres, l'erreur que comporte la mesure des angles étant de 1 seconde?

On a

$$E = 2b \sin \alpha, \quad \sin 1'' = 0,00000157,$$

d'où

$$E = 0^m,942.$$

2°. La base est de 10000 mètres, l'approximation angulaire est de 1 seconde, les sommets des triangles doivent être déterminés à $0^m,1$ près. Quelles sont les limites des angles au sommet?

Pour la limite des angles aigus, nous avons

$$\sin \frac{1}{2} B = \sqrt{\frac{b \sin \alpha}{2E}} = \sqrt{0,79},$$

d'où

$$\frac{1}{2} B = 17^g, \quad B = 34^g.$$

Pour la limite des angles obtus, nous avons

$$\sin B = \frac{b \sin 1'',33}{E} = 0,21,$$

d'où

$$B = 186^g,50.$$

Le même problème, sur une base de 30000 mètres, donne pour la limite des angles obtus

$$\sin B = 0,63, \quad B = 156^g,50.$$

3°. E et α ayant les mêmes valeurs que précédemment, quelle est la plus grande base à laquelle on puisse rattacher un sommet?

On a

$$b = \frac{E}{\sin\alpha} = 63700^m;$$

dimension que n'atteignent pas les côtés des triangles géodésiques.

La limite des côtés des triangles équilatéraux est donnée par l'expression

$$b = \frac{E}{2\sin\alpha} = 31800^m.$$

4°. On a

$$b = 20000^m, \quad B = 50^g, \quad E = 0^m,1.$$

Quelle est la limite de l'approximation que l'on doit obtenir dans la mesure des angles?

On a

$$\sin\alpha = \frac{2E\sin^2\frac{1}{2}B}{b},$$

d'où

$$\log.\sin\alpha = \bar{4},16668, \quad \sin\alpha = 0,00000147, \quad \alpha = 0'',94.$$

$E = 0^{m},1$	$\alpha = 1''$
$b = 40^{k}$	$B\ \frac{76^{g}}{137^{g}}$
$b = 35^{k}$	$B\ \frac{67^{g}}{147^{g}}$
$b = 30^{k}$	$B\ \frac{64^{g}}{157^{g}}$
$b = 25^{k}$	$B\ \frac{58^{g}}{165^{g}}$
$b = 20^{k}$	$B\ \frac{52^{g}}{172^{g}}$
$b = 15^{k}$	$B\ \frac{45^{g}}{180^{g}}$
$b = 10^{k}$	$B\ \frac{36^{g}}{187^{g}}$
$E = 1^{m}$	$\alpha = 10''$

Le tableau ci-joint résume les conditions d'exactitude relatives à la géodésie du premier ordre.

Le même tableau peut servir à la géodésie du second ordre en supposant

$$E = 1^{m}, \quad \alpha = 10''.$$

Supposons que l'on commence un canevas sur une base de 10000 mètres; le premier triangle qui s'appuiera sur cette base pourra avoir un angle au sommet de 36 grades et être isocèle. Il donnera de nouvelles bases de 1800 mètres environ, sur lesquelles on pourra appuyer des triangles isocèles ayant un angle au sommet de 50 grades et des côtés de 24 kilomètres.... On arrivera ainsi aux côtés de 30 kilomètres qui conviennent aux triangles équilatéraux. On conservera cette longueur de côtés jusqu'à ce qu'on veuille revenir à une base de 10 kilomètres qui servira de vérification. Le tableau montre alors combien il est plus facile de diminuer les côtés que de les augmenter. En effet, sur une base de 30 kilomètres, on peut appuyer un triangle isocèle dans lequel l'angle au sommet est de 157 grades; il en résulte des nouvelles bases de 16 kilomètres, desquelles on passe immédiatement à un côté de 10 kilomètres.

Rien ne serait plus facile que d'établir de pareils tableaux pour la géodésie du troisième ordre et pour la topographie.

Pour la géodésie du troisième ordre, on supposerait

$\alpha = 20''$, $E = 2$ mètres. Les limites des valeurs de B plus grandes que 100 grades seraient données par l'expression

$$\sin B = \frac{b \sin \alpha}{E}.$$

Dans les canevas topographiques exécutés au graphomètre, on ne considérerait plus la grandeur naturelle E du déplacement du sommet, mais le déplacement graphique e. On supposerait $\alpha = 2'$, $e = 0^m,0002$.

Dans les canevas à la planchette, on supposerait $\alpha = 5'$, $e = 0^m,0005$.

Dans les opérations de détail avec la boussole ou le déclinatoire, on supposerait $\alpha = 25'$, $e = 0^m,001$.

Revenant à l'ouvrage de M. Vieille sur les approximations numériques, ouvrage que j'ai cité plus haut, je dirai que l'auteur émet une opinion qui n'est pas fondée en disant que *ce qu'il importe de considérer dans tout calcul approximatif, c'est moins l'erreur absolue commise que le rapport de cette erreur au résultat cherché... C'est ce rapport seul, et non l'erreur absolue, qui caractérise nettement le degré d'approximation obtenu.*

Si l'on peut, dans certains cas, se proposer de calculer des longueurs, des surfaces, des volumes, etc., en se donnant la limite des erreurs relatives, il arrive aussi souvent qu'on voudra obtenir les mêmes mesures en se donnant la limite des erreurs absolues. Dans ce dernier cas, l'erreur relative calculée après coup caractérisera, il est vrai, le degré d'approximation obtenu.

J'ajouterai qu'il est certains cas où l'erreur relative n'aurait aucun sens; je citerai, par exemple, les calculs d'angles, de coordonnées, de cotes de hauteur (ce sont des coordonnées verticales) et les calculs des triangles géodésiques; les côtés et les azimuts auxquels conduisent ces derniers calculs sont de véritables coordonnées polaires, qu'on transforme ensuite en coordonnées rectangulaires.

Il n'est pas hors de propos de signaler ici qu'il est inexact de dire, comme le fait l'auteur, p. 3, qu'*une erreur, même très-petite, commise sur la mesure d'une base géodésique, irait en grandissant dans le calcul des triangles du réseau dont cette base est un côté et pourrait conduire à des résultats très-fautifs*. Il est très-facile de se rendre compte que cette erreur se propage, au contraire, sans augmentation.