PAUL VOLPICELLI

Deux théorèmes relatifs à la partition des nombres

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 14 (1855), p. 314-317

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1855_1_14__314_1>

DEUX THÉORÈMES RELATIFS A LA PARTITION DES NOMBRES;

PAR M. PAUL VOLPICELLI.

Lemme. Soit

$$c = 2^{\mu} h_1^{\alpha} h_2^{\beta} \ldots h_k^{\tau},$$

où μ, α, β,..., τ représentent des entiers, et h_1, h_2, h_3,..., h_k expriment des nombres premiers. En posant

$$H = (\alpha + 1)(\beta + 1) \ldots (\tau + 1),$$

les nombres ω_1, ω_2 des solutions entières de l'équation

$$x^2 - y^2 = c$$

sont représentés par les équations

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} \omega_1 &= \frac{(-1)^{2^\mu}(\mu-1)\mathrm{H}}{2}, \\ \omega_2 &= \frac{(-1)^{2^\mu}(\mu-1)\mathrm{H}-1}{2}. \end{aligned} \right.$$

La première de ces formules se rapporte au cas dans lequel au moins un des exposants μ, α, β,..., τ est impair, et la seconde n'est applicable que quand les mêmes exposants sont tous pairs. Dans le cas de

$$\alpha = \beta = \ldots = \tau = 0,$$

μ devra être impair dans la première et pair > 2 dans la seconde. En faisant

$$\alpha = \beta = \ldots = \tau = 1,$$

on aura de la première, par corollaire,

$$\omega_3 = 2^{k-1},$$

formule déjà donnée par Legendre (*) et par Poinsot (**). En outre, en supposant que h_1, h_2,..., h_k soient tous nombres premiers de la forme $4m+1$, le nombre des solutions entières de l'équation

$$x_1^2 + y_1^2 = c$$

est exprimé par les équations

$$(2)\qquad \gamma = \frac{1}{2}\mathrm{H},\quad \gamma' = \frac{1}{2}(\mathrm{H}+1),\quad \gamma'' = \frac{1}{2}(\mathrm{H}-1).$$

(*) *Théorie des nombres*; t. I, p. 8; Paris, 1830.

(**) *Comptes rendus*; t. XXVIII, p. 582; mai 1849.

La première de ces formules est applicable quand, quel que soit μ, un au moins des exposants $\alpha, \beta, \ldots, \tau$, est impair; la deuxième quand, μ étant impair, les mêmes exposants sont tous pairs; la troisième quand, μ étant pair ou zéro, tous les autres exposants sont pairs (*).

THÉORÈME I. *Tout nombre* c, *excepté le double d'un impair, est autant de fois représenté par la somme de* x — y *nombres impairs consécutifs, en commençant par* 2y + 1 *et en terminant par* 2x — 1, *qu'il y a de solutions entières pour l'équation*

$$x^2 - y^2 = c,$$

le nombre desquelles est donné par les équations (1). *Si* c *est carré, il y aura de plus la décomposition suivante :*

$$c = 1 + 3 + 5 + \ldots + 2\sqrt{c} - 1.$$

Exemple : Qu'on ait

$$x^2 - y^2 = 72 = 2^3 . 3^2,$$

on a

$$\mu = 3, \quad \alpha = 2,$$

et pour cela

$$\omega_1 = 3;$$

donc

$$x = 19, \ 11, \ 9; \quad y = 17, \ 7, \ 3;$$

d'où

$$\begin{aligned} x - y &= 2, \ 4, \ 6, \\ 2y + 1 &= 35, \ 15, \ 7, \\ 2x - 1 &= 37, \ 21, \ 17; \end{aligned}$$

et enfin

$$72 = \begin{cases} 35 + 37, \\ 15 + 17 + 19 + 21, \\ 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17. \end{cases}$$

(*) *Journal de Mathématiques pures et appliquées* de M. A.-L. Crelle; tome XLIX.

THÉORÈME II. *Tout nombre* c *qui se décompose en deux carrés* x_1^2, y_1^2 *est la somme de deux progressions arithmétiques dont la première se forme de* y_1 *termes, en commençant par* 2 *et en terminant par* $4y_1-2$, *et la seconde de* x_1-y_1 *termes, en commençant par* $2y_1+1$ *et en terminant par* $2x_1-1$. *Il y aura pour* c *autant de ces décompositions qu'il y a des solutions entières pour l'équation*

$$x_1^2+y_1^2=c,$$

dont le nombre est donné par les équations (2). *Si* c *est carré, il y aura* de plus *la décomposition*

$$c=1+3+5+\ldots+2\sqrt{c}-1.$$

Exemple : Qu'on ait

$$c=1105=17.13.5,$$

les solutions entières de l'équation

$$x_1^2+y_1^2=1105$$

seront

$$x_1=32,\ 31,\ 24,\ 33;\quad y_1=9,\ 12,\ 23,\ 4;$$

d'où

$$4y_1-2=34,\ 46,\ 90,\ 14;\quad 2y_1+1=19,\ 25,\ 47,\ 9;$$
$$2x_1-1=63,\ 61,\ 47,\ 65;\quad x_1-y_1=23,\ 19,\ 1,\ 29;$$

et enfin

$$1105=\begin{cases}2+6+10\ldots+34+19+21+\ldots+61+63,\\ 2+6+\ldots+46+25+27+\ldots+59+61,\\ 2+6+\ldots+90+47,\\ 2+6+\ldots+14+\ 9+11+\ldots+63+65.\end{cases}$$