J. BERTRAND

Sur le dernier terme de l'équation au carré des différences et sur le véritable auteur d'un théorème d'analyse sur les racines d'une équation

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 14 (1855), p. 30-32

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1855_1_14__30_0>

Sur le dernier terme de l'équation au carré des différences et sur le véritable auteur d'un théorème d'analyse sur les racines d'une équation.

(Extrait d'une Lettre.)

Permettez-moi de vous adresser une très-courte observation au sujet d'une phrase que je viens de lire dans les *Nouvelles Annales* (septembre, page 355).

Après avoir apprécié d'une manière très-bienveillante et très-juste l'excellent ouvrage d'algèbre dont M. Serret vient de donner la seconde édition, vous analysez les notes ajoutées au texte primitif, et vous dites, à propos de l'une d'elles :

« Le dernier terme de l'équation au carré des diffé-
» rences occupe une place importante dans certaines
» recherches ; on indique, pour le former, le procédé de
» M. Cauchy, et, dans une note, une méthode *nouvelle*
» qui semble fondée sur celle de M. Joachimstahl et
» même ne pas en différer essentiellement. »

Savez-vous que les choses qui ne diffèrent pas essentiellement sont bien rares ? Leibnitz doutait même qu'il en existât. Nos grands-pères, d'un autre côté, croyant qu'entre deux idées quelconques on peut toujours établir un rapprochement tel quel, s'exerçaient quelquefois à chercher une ressemblance et une différenceplus ou moins ingénieuses entre deux choses proposées.

Il me semble qu'un géomètre ne serait guère embarrassé si, jouant à ce vieux jeu, il avait à comparer la Note de M. Serret à celle de M. Joachimstahl.

Les deux géomètres s'occupent de l'équation au carré des différences, et examinent d'abord sous quelle forme figure dans l'expression de son dernier terme, le terme tout connu de l'équation proposée.

Voilà la ressemblance.

M. Serret, partant de ce résultat presque évident, parvient à un moyen fort ingénieux d'obtenir l'expression complète du dernier terme. La Note de M. Joachimstahl ne donne aucun procédé pour atteindre ce but. Voilà la différence.

Elle me semble établir entre les deux méthodes une *séparation essentielle*.

Vous tenez beaucoup, je le sais, à l'indication exacte des sources et à ce que les noms des inventeurs soient mis sous les yeux du lecteur Quand il s'agit d'un ouvrage élémentaire, je ne partage pas entièrement votre opinion, et vous avez pu vous en apercevoir en parcourant mon *Traité d'Algèbre*. Le livre de M. Serret, s'adressant à des savants, est dans des conditions toutes différentes; aussi je m'associe volontiers aux reproches que vous lui faites indirectement (page 355) de ne pas avoir cité l'auteur de ce beau théorème :

Toute fonction rationnelle des racines d'une équation peut être rendue entière.

Mais le véritable nom à citer est celui de Gauss; il a donné ce théorème dans son Mémoire trop peu connu sur la détermination numérique des intégrales (*Commentaires de Gottingue*, t III, p. 53; 1816), et l'une de ses démonstrations est précisément celle que M. Serret développe en indiquant qu'elle s'étend d'elle-même au cas de plusieurs racines.

Recevez, etc.

J. Bertrand,
Professeur au Lycée Napoléon.

Note du Rédacteur. Nous acceptons avec reconnaissance ces savantes et spirituelles indications. Un journal jouit de l'avantage de pouvoir réparer le lendemain les erreurs commises la veille, et nous considérons comme un devoir d'user d'un tel privilége. Mais nous nous permettrons de faire observer que l'équation auxiliaire $A_m = p_{m-1}^2 V_{m-1}$ (p. 453, Serret) appartient à M. Joachimstahl, c'est convenu. Quant à la méthode pour parvenir à l'équation fondamentale (même page)

$$m \frac{dV_m}{dp_1} + (m-1) p_1 \frac{dV_m}{dp_2} + \ldots = 0,$$

on la trouve dans les deux dernières pages du Mémoire français de M. Cayley : *Nouvelles Recherches sur les covariants* (Crelle, tome XLVII ; 1853) : observation que je dois à l'obligeance de l'éminent analyste M. Brioschi.

Je dois une autre indication historique à l'érudition si vaste de M. Angelo Genocchi : la démonstration du théorème que le produit de deux expressions de la forme

$$p^2 - Bq^2 - Cr^2 + BCs^2,$$

conserve la même forme (leçon vingt-cinquième), démonstration attribuée à M. Hermite, coïncide exactement avec celle qui est donnée par Lagrange (*Mémoires de l'Académie de Berlin*, 1767 et 1770).