Sur la résolution des équations transcendantes

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 14 (1855), p. 295-304

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1855_1_14__295_1>

SUR LA RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS TRANSCENDANTES.

1. Dans tout ce que nous allons dire, nous supposerons que l'équation ne renferme qu'une inconnue à coefficients réels, et qu'un des deux membres est nul, de sorte que l'autre membre est une fonction de l'inconnue.

2. *Premier principe général.* Lorsque deux nombres réels substitués dans une fonction à une variable, à la place de la variable, donnent deux résultats de signes contraires et si, en outre, la fonction ni aucune de ses dérivées ne deviennent ni infinies ni imaginaires, par la substitution de nombres compris entre les deux nombres réels, alors il existe entre ces mêmes nombres au moins un nombre qui, substitué à la place de la variable, annule la fonction.

3. *Second principe général.* Lorsque les substitutions de deux nombres réels ont donné des résultats de signes contraires, on peut, en prenant indéfiniment des moyennes entre ces nombres, parvenir à des limites dont la différence soit moindre qu'une quantité donnée; ces limites

comprennent un nombre qui, substitué dans la fonction, l'annule.

4. La longueur et la complication des calculs rend le plus souvent ce second principe impraticable, et l'on doit recourir à d'autres moyens d'approximation.

Méthode des séries.

Soit l'équation

$$y = x^x - 10 = 0.$$

Substitution. x	Resultats. y
1	-9
2	-6
3	$+17$

il y a au moins une racine entre 2 et 3.

$$x = 2,5, \quad y = -0,118,$$
$$x = 2,6, \quad y = +0,993.$$

On a x à $\frac{1}{10}$ près; faisons

$$x = x_1 + 2,5,$$

x_1 est plus petit que $\frac{1}{10}$.

$$(x_1 + 2,5)^{x_1+2,5} - 10 = 0,$$
$$(2,5 + x_1)\log(x_1 + 2,5) = \log 10 \text{ (log. hyp.)},$$

développant

$$(2,5 + x_1)\left[\log 2,5 + \frac{x_1}{2,5} - \frac{1}{2}\left(\frac{x_1}{2,5}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{2,5}\right)^3 - \ldots\right] = \log 10;$$

On ne veut conserver que la sixième décimale et il faut se rappeler que x_1 est plus petit que 0,1.

$$(2{,}5\log 2{,}5 - \log 10) + x_1(1 + \log 2{,}5) + \frac{1}{1.2}\frac{x^2}{2{,}5} - \frac{1}{2.3}\frac{x^3}{(2{,}5)^2} + \frac{1}{3.4}\frac{x^4}{(2{,}5)^3} - \ldots,$$

$$2{,}5\log 2{,}5 - \log 10 = -0{,}0118584,$$
$$1 + \log 2{,}5 = 1{,}916291,$$
$$\frac{1}{2.2{,}5} = 0{,}20000,$$
$$-\frac{1}{6.(2{,}5)^2} = -0{,}0267,$$
$$+\frac{1}{12.(2{,}5)^3} = 0{,}005.$$

$$0{,}005x_1^4 - 0{,}0267x_1^3 + 0{,}20000x_1^2 + 1{,}916291x_1 - 0{,}0118584 = 0;$$

équation algébrique. En la traitant par les procédés ordinaires, on trouve

$$x_1 = 0{,}006184,$$

et

$$x = 2{,}506184.$$

Si l'on veut continuer, on fera

$$x = x_1 + 2{,}506184,$$

et ainsi de suite.

Soit

$$f(x)^{f(x)} = a,$$

$f(x)$ est une fonction donnée de x, et a une quantité réelle donnée; on pose

$$f(x) = z, \quad z^z = a,$$

on déduit la valeur de z, et la question se réduit à résoudre l'équation

$$f(x) = z.$$

1^er^ *Exemple :*

$$\log x^{\log x} = 10,$$

on a

$$\log x = 2,506184$$

et

$$x = 320,76, \quad \operatorname{tang} x^{\operatorname{tang} x} = 10, \quad x = 17^\circ\, 47'.$$

2^e^ *Exemple :*

$$y = e^x - 2x - 5 = 0;$$

e est la base du système népérien.

x	y
1	$-4,282$
2	$-1,611$
3	$+9,085$
2,4	$+1,223$
2,3	$+0,374$
2,2	$-0,375$

$$x = x_1 + 2,2,$$
$$y = e^{2,2+x_1} - 2\,(2,2 + x_1) - 5 = 0,$$
$$y = 9,025054\,e^{x_1} - 2x_1 - 9,4 = 0,$$
$$y = 9,025054\left(1 + x_1 + \frac{x_1^2}{1.2} + \frac{x_1^3}{1.2.3} + \ldots\right) - 2x_1 - 9,4 = 0;$$

négligeant les x_1^6, on obtient

$$0,8x_1^5 + 0,038x_1^4 + 1,504x_1^3 + 4,5125x_1^2 + 7,02505\,x_1 - 0,374946 = 0,$$

d'où l'on tire la valeur de x_1.

Pour trouver les racines imaginaires, posons

$$x = u + iv;$$

u et v sont des quantités réelles et

$$i = \sqrt{-1}.$$

On a

$$y = c^{u+vi} - 2(u + vi) - 5 = e^u(\cos v + i \sin v) - 2(u + vi) - 5 = 0.$$

Cette équation se décompose en deux autres

(1) $$y = c^u \cos v - 2u - 5 = 0,$$

$$c^u = \frac{2v}{\sin v}.$$

u étant réel, $\frac{\sin v}{2v}$ est positif; ainsi u est compris entre

$$0 \text{ et } \pi,$$
$$2\pi \text{ et } 3\pi,$$
$$4\pi \text{ et } 5\pi.$$

Désignons une très-petite quantité par ε, on a

$$v = \varepsilon, \quad u = \log \text{hyp}. 2, \quad y = -.$$
$$v = \pi - \varepsilon, u = \infty, \quad y = -\infty.$$

L'équation (1) n'a donc pas de racines entre 0 et π.

Faisons

$$v = 2\pi + \varepsilon, \quad u = \infty, \quad z = +, \quad \cos(2\pi + \varepsilon) \text{ positif},$$
$$v = 3\pi - \varepsilon, \quad u = \infty, \quad z = -, \quad \cos(3\pi - \varepsilon) \text{ négatif};$$

il y a donc une valeur de v entre 2π et 3π ou entre 6 et 9.

$$v = 7, \quad u = 3,059, \quad z = + \ 4,947,$$
$$v = 8, \quad u = 2,783, \quad z = - \ 12,919,$$
$$v = 7,5, \quad u = 2,772, \quad z = - \ 5,500,$$
$$v = 7,2, \quad u = 2,898, \quad z = + \ 0,241,$$
$$v = 7,3, \quad u = 2,843, \quad z = - \ 1,654;$$

donc l'on a

$$x = 2,8 + 7,2\,i \text{ environ.}$$

Représentons cette valeur par a, posons

$$x = a + x_1;$$

on a l'équation

$$e^{a+x_1} - 2(a + x_1) - 5 = 0,$$

ou

$$e^{2,8}(\cos 7,2 + i \sin 7,2)\, e^{x_1} - 10,6 - 14,4\,i - 2x_1 = 0.$$

Dans un cercle de rayon 1, un arc de longueur 7,2 contient $412^\circ\, 31'\, 46''\, 46'''$; le logarithme du cosinus de cet arc est

$$9,7841561 - 10, \quad \log e^{2,8} = 1,2160246,$$

d'où l'on tire

$$e^{2,8} \cos 7,2 = 10,0042 \text{ (*)},$$

$$\log \sin 7,2 = 9,8996378,$$

d'où

$$e^{2,8} \sin 7,2 = 13,051 \text{ (**)};$$

$$(10,0042 + i.13,051)\left(1 + x_1 + \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_1^3}{1.2.3} + \ldots\right)$$
$$- 10,6 - 14,4\,i - 2x_1 = 0,$$

d'où

$$x_1 = 0,092 + 0,010\,i,$$
$$x = 2,892 + 7,210\,i.$$

5. Cette méthode consiste donc à trouver d'abord une valeur de la transcendante à un dixième près. Soit m cette valeur de la variable x, on fait

$$x = m + x_1,$$

(*) M. Spitzer trouve 10,00413.
(**) M. Spitzer trouve 13,051519.

x_1 sera au-dessous d'un dixième. On développe la transcendante en série convergente; on néglige les termes de la série dont les valeurs sont au-dessous de la décimale à laquelle on veut s'arrêter, on obtient une seconde approximation m_1; on fait derechef

$$x = m_1 + x_2,$$

et l'on continue de même.

Équations à deux inconnues.

6. Le premier principe général (n° 2) est encore applicable. Soient

$$f(x, y) = 0, \quad F(x, y) = 0$$

les deux équations données. F et f sont des fonctions entières; posons

$$z = f(x, y), \quad F(x, y) = 0;$$

en donnant à x une suite de valeurs, on obtient une suite correspondante de valeurs pour y et z. Si ces suites sont continues et que z change de signe, il existe au moins un intervalle où les valeurs de x et de y auront annulé z et ces valeurs satisfont aux deux équations. On pourra en continuant trouver des valeurs de x et de y à moins d'un dixième près et ensuite procéder comme ci-dessus.

Soient les deux équations

$$x^y = 5, \quad y^x = 4,$$

on aura les suites

x	y	z
1	4	-4
2	2	-1
3	1,587	$+0,719$
2,5	1,741	$-0,0699$
2,6	1,704	$+0,0962$

Ainsi, à moins d'un dixième près,

$$x = 2,5,$$
$$y = 1,7;$$
$$x = 2,5 + x_1, \quad y = 1,7 + y_1;$$
$$(2,5 + x_1)^{1,7+y_1} = 5, \quad (1,7 + y_1)^{2,5+x_1} = 4;$$

Prenant les logarithmes hyperboliques, développant et mettant à la place de log 2,5, log 1,7 leurs valeurs respectives, on obtient

$$(1,7 + y_1)\left[\begin{array}{c} 0,9162907 + \frac{x_1}{2,5} \\ - \frac{1}{2}\left(\frac{x_1}{2,5}\right)^2 + \ldots \end{array}\right] = 1,6094379,$$

$$(2,5 + x_1)\left[\begin{array}{c} 0,5306282 + \frac{y_1}{2,7} \\ - \frac{1}{2}\left(\frac{y_1}{1,7}\right)^2 + \ldots \end{array}\right] = 1,3862944;$$

ne conservant que les premières puissances, on obtient

$$0,68 x_1 + 0,9162907 y_1 = 0,0517437,$$
$$0,530628 x_1 + 1,470588 y_1 = 0,0597239;$$
$$x_1 = 0,0416, \quad y_1 = 0,0253,$$
$$x = 2,5416, \quad y = 1,7253.$$

Observation. Nous avons copié ces exemples dans l'ouvrage de M. Spitzer (voir *Nouvelles Annales*, t. X, p. 366).

Méthode des Tables.

7. La méthode des séries peut être employée pour toutes les transcendantes susceptibles de se développer en une série convergente; mais lorsque la transcendante est *périodique*, telles sont les lignes trigonométriques, il est souvent plus commode d'en dresser les Tables.

Prenons pour exemple le problème de Képler.

Soit l'équation

$$z = x + e \sin x,$$

z est l'anomalie moyenne, x l'anomalie excentrique et e l'excentricité exprimée en parties circulaires de rayon 1; étant donné z, il s'agit de trouver x.

Soit

$$e = 0,25 \ (*)$$

exprimée en parties circulaires

$$e = 14^\circ\, 19'\, 13''.$$

Voici le commencement de la Table :

x	z	Δz
° '	° ' ''	' ''
0.00	0 00.00,000	
		12.30,000
0.10	0.12.30,000	
		12.29,998
0.20	0.24 59.998	
		12.29,996
0.30	0.37.29,994	
		12.29,992
0.40	0.49.59,986	
		12.29,987
0 50	1. 2.29,973	
		12.29,981
1.00	1.14.59,954	

On continue la Table jusqu'à 90 degrés; ensuite les valeurs de $e \sin x$ reviennent. Étant donnée la valeur de z, on trouve celle de x soit dans la Table, soit par les parties proportionnelles ou par interpolation. On calcule ainsi une Table pour chaque planète.

Dans tous les Traités d'astronomie, on donne pour ce problème la méthode par séries (*Mécanique céleste*, Ire partie, livre II).

(*) La plus grande excentricité connue est celle de Junon, 0,256; la moindre est celle de Vénus, 0,0682; et après vient celle de Neptune, 0,00872: la plus grande, parmi les anciennes planètes, est celle de Mercure, 0,20562.

Consultez pour l'origine du problème l'*Histoire de l'Astronomie moderne*, de Delambre, t. Ier, p. 466, 1821. On y lit le développement complet des idées consignées dans la lettre de Képler à Ursus (*Bulletin*, p. 63), idées qui ont absorbé toute la vie de Képler.

On trouve une solution du problème de Képler, par M. Hansen, dans les *Comptes rendus*, t. XXXV, n° 21, 22 novembre 1852, et *Astronomische Nachrichten*, tome XXXV, page 317, 1853.

Cette solution donnée par les séries est d'une simplicité et d'une élégance remarquables ; il me semble qu'on peut la déduire de certains théorèmes de notre illustre géomètre, maintenant le plus grand analyste du siècle, théorèmes que je ne puis retrouver pour le moment.

Le nombre de ces théorèmes est si considérable, leur dispersion si grande, qu'il faudrait une boussole spéciale pour se diriger dans ces sporades analytiques. A un grand architecte, on est en droit de demander un édifice. En accumulant sans cesse matériaux sur matériaux, on rencontre l'inconvénient si pittoresquement exprimé dans ce dicton allemand : *Les arbres empêchent de voir la forêt.* Quand aurons-nous la mécanique moléculaire si souvent, si solennellement promise ! Toutefois, *demain* n'appartient à personne.

La suite prochainement.