

BORCHARDT

Deux théorèmes de M. Borchardt sur les fonctions symétriques des racines d'une équation algébrique et sur les rayons de courbure principaux des surfaces

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 14 (1855), p. 26-27

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1855_1_14__26_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1855, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

DEUX THÉORÈMES DE M. BORCHARDT

Sur les fonctions symétriques des racines d'une équation algébrique
et sur les rayons de courbure principaux des surfaces.

Fonctions symétriques.

Soit l'équation algébrique

$$0 = \varphi(x) = x^n - A x^{n-1} + \dots +$$

racines $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$;

la fonction symétrique $\sum a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \dots a_i^{\alpha_i}$ est le coefficient
du terme $x_1^{-(\alpha_1+1)} x_2^{-(\alpha_2+1)} \dots x_i^{-(\alpha_i+1)}$ dans le déve-
loppement, suivant des puissances décroissantes, de l'ex-
pression suivante :

$$\frac{\Sigma \pm \varphi'(x_1)[x_2 \varphi'(x_2) - \varphi(x_2)][x_3^2 \varphi'(x_3) - 2x_3 \varphi(x_3)][x_4^3 \varphi'(x_4) - 3x_4 \varphi(x_4)] \dots [x_i^{i-1} \varphi'(x_i) - (i-1)\varphi(x_i)]}{\varphi(x_1)\varphi(x_2) \dots \varphi(x_i) \cdot (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \dots (x_i - x_1)(x_3 - x_2) \dots (x_i - x_2) \dots (x_i - x_{i-1})}$$

On voit que ce théorème est une extension du théo-
rème dont on se sert ordinairement pour trouver la

somme de la fonction symétrique $a_1^m + a_2^m + \dots + a_n^m$,
 somme qu'on obtient en développant $\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}$.

Rayons de courbure principaux.

Soit $f(x, y, z) = 0$ l'équation d'une surface et soient

$$R = \left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2 + \left(\frac{df}{dz}\right)^2,$$

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{R}} \frac{df}{dx}, \quad \eta = \frac{1}{\sqrt{R}} \frac{df}{dy}, \quad \zeta = \frac{1}{\sqrt{R}} \frac{df}{dz};$$

de sorte que $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$. Cela posé, faisons

$$x_1 = x - p\xi, \quad y_1 = y - p\eta, \quad z_1 = z - p\zeta;$$

p désignant une quantité indépendante de x, y, z ; formons le déterminant

$$\sum \pm \frac{dx_1}{dx} \frac{dy_1}{dy} \frac{dz_1}{dz}.$$

Ce déterminant, égalé à zéro, donne une équation du second degré en p ; car le terme p^3 est multiplié par le déterminant $\sum \pm \frac{d\xi}{dx} \frac{d\eta}{dy} \frac{d\zeta}{dz}$, qui s'évanouit d'après un principe général pour tout déterminant dans lequel les n fonctions de n variables dont on considère les coefficients différentiels du *premier ordre* ne sont pas indépendantes. Or l'équation du second degré en p a pour racines les rayons des deux courbures principales de la surface.

Observation. Ces deux théorèmes sont dans une Lettre de M. Borchardt, du 21 mars 1854, adressée à M. Hermite, qui a bien voulu m'en faire part.