NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

R. RUBINI

Sur les coniques polaires et les sections cycliques

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 14 (1855), p. 237-240

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1855_1_14__237_1>

SUR LES CONIQUES POLAIRES ET LES SECTIONS CYCLIQUES ;

D'APRÈS M. R. RUBINI,
Professeur à Naples.

1. Soient les trois équations

$$r^2 = \frac{4a}{\alpha^2}(\alpha u - u^2), \quad r^2 = \frac{4a}{\alpha^2}(\alpha u - u^2), \quad r^2 = 2mu.$$

r est un rayon vecteur et u l'arc correspondant; a, α, m des constantes données. Les trois courbes passent évidemment par le pôle. La première courbe (ellipse polaire) est une courbe fermée; la seconde courbe (hyperbole polaire) a deux branches infinies en hélice; la troisième courbe (parabole polaire) a une branche infinie en hélice. Les constructions offrent un exercice et des lieux géométriques instructifs.

La quadrature se ramène à des arcs de cercle, et la rectification, comme on s'y attend, à des fonctions elliptiques. La discussion des constantes présente quelques difficultés que le savant calculateur surmonte avec habileté.

2. Sur une section cyclique faite dans une surface du second degré prenons un point fixe O et un point quelconque M sur la surface; la projection de OM sur le plan de la section rencontre le cercle en un second point O′. Soit m le point de rencontre des trois hauteurs du triangle MOO′; appelons M et m points *correspondants*. Soient trois autres points N, P, Q situés aussi sur la surface, et n, p, q les points correspondants; on a ce théorème :

Le volume du tétraèdre MNPQ, *divisé par le volume du tétraèdre* mnpq, *est constant quels que soient les points* M, N, P, Q.

3. Si les points M, N, P, Q restent fixes et que le plan cyclique se meuve parallèlement à lui-même, le volume du tétraèdre *mnpq* reste constant.

4. Par le point O menons dans le plan cyclique deux droites OO′, OO″, perpendiculaires entre elles, et élevons en O une perpendiculaire OR au plan cyclique.

Si les axes de la section faite par le plan ROO′ font des angles de 45 degrés avec OO′, et de même les axes de la section faite par le plan ROO″, avec la droite OO″, alors le tétraèdre MNPQ est équivalent au tétraèdre *mnpq*.

5. Dans un paraboloïde de révolution les quatre points m, n, p, q sont dans un plan normal à l'axe; plan distant du plan cyclique considéré d'une longueur égale au paramètre de la parabole génératrice. Ces théorèmes, ainsi que les suivants, sont démontrés analytiquement.

6. L'axe d'un cône du second degré est l'intersection

des deux sections principales, majeure et mineure, qui passent par le sommet. Par un point *quelconque* de cet axe, menons un plan A variable, mais toujours perpendiculaire à cet axe; ce plan coupe le cône suivant une ellipse, et les deux plans *cycliques* qui passent par le sommet suivant deux droites. Les lieux géométriques des pôles de ces droites, pris par rapport à l'ellipse, sont deux droites passant par le sommet. Désignons ces droites par le nom de *rayons polaires* des plans cycliques.

Le même plan A coupe les deux droites focales en deux points; les lieux géométriques des polaires de ces points, pris par rapport à l'ellipse considérée, sont deux plans passant par les sommets; nous les désignons par *plans polaires* des lignes focales. Ce sont les plans directeurs de MM. Briot et Bouquet (*Leçons nouvelles de Géométrie analytique*, page 416). Ces définitions posées, on a ces théorèmes.

Théorème. *Dans tout cône du second degré dont la section principale mineure est égale à un angle droit, le produit du cosinus des angles que forme une génératrice avec les deux rayons polaires des plans cycliques est égal à la moitié du carré de la cotangente de la moitié de l'angle de la section principale majeure. La somme des angles que fait un plan tangent quelconque avec les deux rayons polaires est égale à un angle droit; la tangente de l'angle que fait un rayon polaire et un plan tangent, multipliée par le carré du cosinus de l'angle que fait le même rayon avec la génératrice de contact, donne un produit constant.*

Observation. On entend par angle d'une section l'angle que font les deux génératrices situées dans cette section.

7. Théorème. *Dans tout cône du second degré les distances d'un point du cône à une focale et au plan polaire de cette focale sont dans un rapport constant.*

8. Pour démontrer le théorème du § 1, l'auteur part de l'équation

$$(1)\quad x(a-x)+y(b-y)+Az^2+Byz+Cxz+Dz=0,$$

axes rectangulaires; les coordonnées du point M étant x', y', z', celles du point m sont x', y', $\frac{x'(a-x')+y'(b-y')}{z'}=Z'$; ce qui donne, vu l'équation (1),

$$Az'+By'+Cx'+D=-Z';$$

et, par la méthode des déterminants, on déduit facilement les théorèmes énoncés.

Les théorèmes sur le cône s'établissent à l'aide de l'équation suivante du cône

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-z^2=0,$$

axes rectangulaires; a est la tangente du demi-angle de la section majeure et b la tangente du demi-angle de la section mineure. Alors

Équations des focales		$y=\pm\sqrt{\frac{a^2-b^2}{b^2+1}}\,z,$
—	des plans cycliques.	$y=\pm b\sqrt{\frac{a^2+1}{a^2-b^2}}\,z,$
—	de l'ellipse...... .	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=k^2,$
—	des rayons polaires.	$y=\pm b\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2+1}}\,z,$
—	des plans polaires..	$x=\pm a^2\sqrt{\frac{b^2+1}{a^2-b^2}}\,z.$

Ces élégants résultats sont l'objet de deux Mémoires insérés, le premier en janvier 1853 et le second en juin 1854, dans les *Annali di Scienze matematiche e fisiche*, publiées à Rome par le célèbre géomètre Barnaba Tortollini, recueil qui entretient le feu sacré dans la patrie de Galilée. C'est l'Italie.