

LECLERC

Note sur la base des logarithmes népériens

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 14 (1855), p. 225-228

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1855_1_14__225_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1855, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

NOTE SUR LA BASE DES LOGARITHMES NÉPÉRIENS;

PAR M. LECLERC,

Conducteur des Ponts et Chaussées,
à Neuchâtel-en-Bray.

On trouve dans la Note IV de la *Géométrie* de Legendre la formule suivante :

$$(1) \quad \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{x}{1 + \frac{x^2}{3 + \frac{x^2}{5 + \dots}}}$$

Je remplace d'abord x par $\frac{1}{x}$, ce qui me donne

$$\frac{e^{\frac{1}{x}} - e^{-\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}} + e^{-\frac{1}{x}}} = \frac{1}{x + \frac{x}{3x^2 + \frac{x^2}{5x^2 + \frac{x^2}{7x^2 + \dots}}}}$$

ou

$$\frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{e^{\frac{1}{x}} + 1} = \frac{1}{x + \frac{1}{3x + \frac{1}{5x + \dots}}}$$

On tire de cette équation la formule générale

$$(2) \quad e^{\frac{1}{x}} = \frac{x + 1 + \frac{1}{3x + \frac{1}{5x + \dots}}}{x - 1 + \frac{1}{3x + \frac{1}{5x + \dots}}}$$

En y faisant $x = 2$, on a donc

$$e = \frac{3 + \frac{1}{6 + \frac{1}{10 + \frac{1}{14 + \dots}}}}{1 + \frac{1}{6 + \frac{1}{10 + \frac{1}{14 + \dots}}}};$$

puis, successivement,

$$e = 2 + \frac{3 + \frac{1}{6 + \frac{1}{10 + \dots}} - 2 \left(1 + \frac{1}{6 + \frac{1}{10 + \dots}} \right)}{1 + \frac{1}{6 + \frac{1}{10 + \dots}}}$$

$$= 2 + \frac{1 - \frac{1}{6 + \frac{1}{10 + \dots}}}{1 - \frac{1}{6 + \frac{1}{10 + \dots}}};$$

et enfin

$$(3) \quad e = 2 + \frac{5 + \frac{1}{10 + \frac{1}{14 + \frac{1}{18 + \dots}}}}{7 + \frac{1}{10 + \frac{1}{14 + \frac{1}{18 + \dots}}}}.$$

Les réduites de même rang, dans les deux fractions continues qui entrent dans cette formule, ayant mêmes dénominateurs, il suffira, pour obtenir des valeurs e_1 , e_2 , e_3 , etc., de plus en plus approchées du nombre e , de calculer les numérateurs de ces réduites. On trouve

ainsi

$$e_1 = 2 + \frac{5}{7} = 2,71 \dots,$$

$$e_2 = 2 + \frac{51}{71} = 2,718 \dots,$$

$$e_3 = 2 + \frac{51 \cdot 14 + 5}{71 \cdot 14 + 7} = 2 + \frac{719}{1001} = 2,7182817 \dots$$

Remarque sur la Note précédente.

Si l'on prend la première valeur de e , on peut l'écrire ainsi :

$$e = 1 + \frac{2}{1 + \frac{1}{6 + \frac{1}{10 + \frac{1}{14 + \dots}}}}$$

en sorte que l'irrationnelle e se trouve développée en une fraction continue très-simple et très-rapidement convergente.

Il est facile ensuite de transformer en série la fraction continue (*Nouvelles Annales*, tome VIII, page 170), et l'on trouve

$$e = 1 + 2 \left\{ \frac{1}{1} - \frac{1}{1 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 71} - \frac{1}{71 \cdot 1001} \right. \\ \left. + \frac{1}{1001 \cdot 18089} - \dots \right\}.$$

E. C.

Note du Rédacteur. M. Leclerc indique la formule générale

$$a^{\frac{2}{x}} = 1 + \frac{2}{\left(\frac{x}{la}\right) - 1 + \frac{1}{3\left(\frac{x}{la}\right) + \frac{1}{5\left(\frac{x}{la}\right) + \dots}}}$$

extraite de la *Science* du 4 et du 19 avril 1855, journal scientifique *quotidien*, le premier de ce genre et auquel les

noms des collaborateurs promettent un grand succès,
pourvu que ces noms soient autre chose que des noms.