

BRIOSCHI

Sur les questions 241 et 141

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 14
(1855), p. 20-24

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1855_1_14__20_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1855, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LES QUESTIONS 241 ET 141;

PAR M. BRIOSCHI,

Professeur à l'Université de Pavie.

Question 241. — Théorème d'Euler démontré par M. Loxhay. (*Nouvelles Annales*, tome XI, page 424).

$$A_0, A_1, A_2, \dots, A_r$$

sont les termes d'une série récurrente; si l'on a

$$A_{r+2} = a A_{r+1} + b A_r,$$

on a aussi

$$\frac{A_{r+1}^2 - a A_r A_{r+1} + b A_r^2}{b^r} = \text{const.}$$

Théorème plus général. En supposant

$$A_{r+s} = a_1 A_{r+s-1} + a_2 A_{r+s-2} + \dots + a_s A_r,$$

on a

$$\frac{1}{a_s^r} \begin{vmatrix} A_r & A_{r+1} & \dots & A_{r+s-1} \\ A_{r+1} & A_{r+2} & \dots & A_{r+s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{r+s-1} & A_{r+s} & \dots & A_{r+2s-2} \end{vmatrix} = \text{const.}$$

En effet, en substituant au lieu des éléments de la dernière ligne de ce déterminant les valeurs données par l'équation caractéristique, on a :

$$\begin{vmatrix} A_r & A_{r+1} & \dots & A_{r+s-1} \\ A_{r+1} & A_{r+2} & \dots & A_{r+s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{r+s-1} & A_{r+s} & \dots & A_{r+2s-2} \end{vmatrix} = (-1)^{(s-1)} a_s \begin{vmatrix} A_{r-1} & A_r & \dots & A_{r+s-2} \\ A_r & A_{r+1} & \dots & A_{r+s-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{r+s-2} & A_{r+s-1} & \dots & A_{r+2s-3} \end{vmatrix}.$$

et, par conséquent (*):

$$\begin{vmatrix} A_r & A_{r+1} & \dots & A_{r+s-1} \\ A_{r+1} & A_r & \dots & A_{r+s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{r+s-1} & A_{r+s} & \dots & A_{r+2s-1} \end{vmatrix} = (-1)^{r(s-1)} a_s^r \begin{vmatrix} A_0 & A_1 & \dots & A_{s-1} \\ A_1 & A_2 & \dots & A_s \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{s-1} & A_s & \dots & A_{2s-1} \end{vmatrix}.$$

(*) Tous les a , à l'exception de a_s , s'en vont; ensuite on passe de A_{r-1} à A_{r-2} , de là à A_{r-3} , etc.

Si, dans le premier membre de cette équation, on met pour A_{r+s} , A_{r+s+1} etc., leurs valeurs données par l'équation caractéristique, on a

$$\varphi(a_1, a_2, \dots, a_s, A_r, A_{r+1}, \dots, A_{r+s-1}) = a_r^s \cdot \text{const.}$$

La question 141 (t. VI, p. 134) est un théorème énoncé par Fourier (*). M. Tardy (**) pense qu'il s'est glissé quelque erreur dans ce qu'avance Fourier à propos de l'application du même théorème à la recherche des racines d'une équation par l'emploi des séries récurrentes. Je suis conduit à partager l'opinion de mon savant ami en m'appuyant sur les considérations suivantes.

Soit $f(x) = 0$ l'équation donnée; soient $x_1, x_2, \dots, x_n$ ses racines; je suppose

$$(1) \quad A_r = \sum_s \frac{c_s}{x_s^{r+1}},$$

et je considère les deux séries récurrentes

$$L_0, L_1, \dots, L_r, \dots, \quad M_0, M_1, \dots, M_r, \dots,$$

dans lesquelles

$$L_r = \begin{vmatrix} A_r & A_{r+1} \\ A_{r+2} & A_{r+3} \end{vmatrix}, \quad M_r = \begin{vmatrix} A_r & A_{r+1} \\ A_{r+1} & A_{r+2} \end{vmatrix}.$$

En substituant pour A_r , A_{r+1} , etc., les valeurs données par l'équation (1), on a

$$L_r = \begin{vmatrix} \sum_s \frac{c_s}{x_s^{r+1}} & \sum_t \frac{c_t}{x_t^{r+2}} \\ \sum_s \frac{c_s}{x_s^{r+3}} & \sum_t \frac{c_t}{x_t^{r+4}} \end{vmatrix} = \sum_s \sum_t \frac{c_s c_t}{(x_s x_t)^{r+1}} \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{x_t} \\ \frac{1}{x_s^2} & \frac{1}{x_t^3} \end{vmatrix},$$

(*) *Analyse des équations déterminées*, Exposé synoptique, p. 72.

(**) *Nouvelles Annales*, janvier 1854.

c'est-à-dire ,

$$L_r = \sum_s \sum_t \frac{c_s c_t}{(x_s x_t)^{r+3}} \cdot \frac{1}{x_t} (x_t^2 - x_s^2),$$

et analoguement ,

$$M_r = \sum_s \sum_t \frac{c_s c_t}{(x_s x_t)^{r+2}} \cdot \frac{1}{x_t} (x_t - x_s).$$

J'observe que les séries des quotients $\frac{L_r}{L_{r-1}}, \frac{M_r}{M_{r-1}}$ ne peuvent avoir pour limites que le produit $x_s x_t$ des deux premières racines de la proposée; et cela est contraire à ce qu'avance Fourier à propos de la première série $\frac{L_r}{L_{r-1}}$.

Mais nous pouvons former une autre série de termes de la forme $\frac{L_r}{M_{r+1}}$, qui évidemment a pour limite la somme $x_s + x_t$ des deux premières racines.

Pour déterminer les trois premières racines on pourra former trois séries récurrentes :

$L_0, L_1, \dots, L_r, \dots$; $M_0, M_1, \dots, M_r, \dots$; $N_0, N_1, \dots, N_r, \dots$,
en posant

$$L_r = \begin{vmatrix} A_r & A_{r+1} & A_{r+2} \\ A_{r+3} & A_{r+4} & A_{r+5} \\ A_{r+6} & A_{r+7} & A_{r+8} \end{vmatrix}, \quad M_r = \begin{vmatrix} A_r & A_{r+1} & A_{r+2} \\ A_{r+4} & A_{r+5} & A_{r+6} \\ A_{r+8} & A_{r+9} & A_{r+10} \end{vmatrix},$$

$$N_r = \begin{vmatrix} A_r & A_{r+1} & A_{r+2} \\ A_{r+3} & A_{r+4} & A_{r+5} \\ A_{r+6} & A_{r+7} & A_{r+8} \end{vmatrix}.$$

En effet, on a

$$L_r = \begin{vmatrix} \sum_s \frac{c_s}{x_s^{r+1}} & \sum_t \frac{c_t}{x_t^{r+2}} & \sum_t \frac{c_t}{x_t^{r+3}} \\ \sum_s \frac{c_s}{x_s^{r+4}} & \sum_t \frac{c_t}{x_t^{r+5}} & \sum_t \frac{c_t}{x_t^{r+6}} \\ \sum_s \frac{c_s}{x_s^{r+7}} & \sum_t \frac{c_t}{x_t^{r+8}} & \sum_t \frac{c_t}{x_t^{r+9}} \end{vmatrix},$$

On obtient $L_{r,1}$ en substituant aux éléments de la seconde ligne de $L_{r,s}$ les éléments suivants :

$$A_{r+s}, A'_{r+s+1}, \dots, A_{r+2s-1};$$

de même on obtient $L_{r,2}$ en substituant aux éléments de la troisième ligne de $L_{r,s}$ ces dernières quantités, et ainsi de suite. Les séries des quotients

$$\frac{L_{r,1}}{L_{r,s}}, \frac{L_{r,2}}{L_{r,s}}, \dots, \frac{L_{r,s-1}}{L_{r,s}},$$

donnent la somme des racines, la somme des produits deux à deux, la somme des produits à $s-1$ à $s-1$, et chacune des séries $\frac{L_{r,1}}{L_{r-1,1}}, \frac{L_{r,2}}{L_{r-1,2}}$, etc., donnera le produit des racines.

L'exposé synoptique des recherches de Fourier sur l'application des séries récurrentes à la résolution des équations se termine par ces paroles : « *Au reste, nous ne pensons point que l'on parvienne assez promptement par cette voie à la connaissance des racines. Les exemples cités par Euler sont ingénieusement choisis, mais ce mode d'approximation exige en général trop de calculs. Nous ne considérons donc cette question que sous les rapports théoriques.* » C'est pour cela que je crois inutile d'entrer en de plus longs détails.