Nouvelles annales de mathématiques

Jules Vieille

Solution d'un problème sur le triangle rectiligne

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 14 (1855), p. 162-168

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1855_1_14__162_1>

SOLUTION D'UN PROBLÈME SUR LE TRIANGLE RECTILIGNE;

PAR M. JULES VIEILLE.

Étant donnés de position le centre A du cercle circonscrit à un triangle, le centre B du cercle inscrit, le centre de gravité G de l'aire et le point de rencontre C des trois hauteurs, on peut se proposer de résoudre le triangle. On sait que trois de ces quatre points A, G et C sont toujours en ligne droite et que la distance GC est double de AG. Il en résulte que la connaissance des distances mutuelles des quatre points n'équivaut qu'à trois conditions distinctes.

Euler a montré (*Mémoires de Saint-Pétersbourg*, 1776) comment le calcul des côtés du triangle, en fonction des distances mutuelles de ces points, se ramenait à la résolution d'une équation du troisième degré. L'analyse d'Euler a été reprise avec d'utiles développements par le savant directeur des *Nouvelles Annales* (t. I, p. 79).

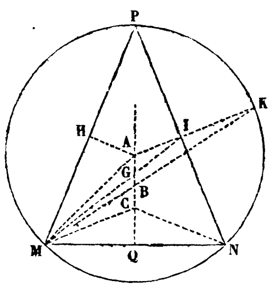
Le but que nous nous proposons ici est plus restreint. Nous supposons que le centre B du cercle inscrit soit placé sur la ligne droite qui contient déjà les trois autres points, et, dans ce cas particulier, des considérations très-simples nous fournissent pour les côtés des longueurs constructibles avec la règle et le compas.

Voici donc l'énoncé de notre problème :

On suppose que le centre B du cercle inscrit à un triangle MNP soit situé sur la droite AGC qui joint le centre A du cercle circonscrit, le centre de gravité G, et le point d'intersection C des trois hauteurs. On donne de plus les distances $AB = f$, $BG = h$.

On propose de calculer les longueurs des côtés du triangle, et de construire les valeurs fournies par le calcul.

Fig 1.



Solution. Démontrons en premier lieu que *le triangle* MNP *est isocèle*. Il est visible que la bissectrice MB passe par le milieu K de l'arc PN, et que la droite AK rencontre le côté PN en son milieu I, situé sur le prolongement de MG. De plus MC et AI étant parallèles comme perpendiculaires à PN, on a la proportion

$$\frac{MC}{AI} = \frac{GC}{AG},$$

et comme on sait que GC est double de AG, on en tire

$$MC = 2\,AI.$$

De même

$$NC = 2\,AH,$$

H désignant le milieu du côté PM.

Ceci ne suppose pas que le centre B du cercle inscrit soit sur la droite AGC. Si maintenant nous avons égard à cette condition, les triangles semblables MBC, ABK nous donneront la proportion

$$\frac{MC}{AK} = \frac{BC}{AB},$$

d'où

$$MC = \frac{AK \cdot BC}{AB};$$

mais si l'on avait considéré, au lieu de la perpendiculaire MC qui répond au côté PN, la perpendiculaire NC qui répond au côté PM, on aurait eu une proportion qui n'eût différé de la précédente que par le changement de MC en NC. On conclut de là

$$MC = NC,$$

et, par suite,

$$AI = AH.$$

Mais AI et AH sont les distances du centre A aux deux cordes PN et PM. Donc ces cordes sont égales et le triangle MNP est isocèle.

La droite des centres AGBC, ayant deux points A et C équidistants des sommets M et N, se confond donc avec la perpendiculaire élevée sur le milieu de MN ; et, par conséquent, elle passe par le sommet P du triangle isocèle.

Il faut bien remarquer que le raisonnement par lequel on vient de prouver que MC = NC, ne s'appliquerait pas à la troisième hauteur PC. Car les points A, G, B étant situés sur cette droite, les triangles semblables, analogues à ceux dont on vient de faire usage, s'évanouiraient.

Maintenant, connaissant f *et* h, *proposons-nous de calculer les côtés* PN = a, MN = b.

Soit R le rayon du cercle circonscrit ; on a

$$\begin{aligned}
MC &= 2\,AI = 2\sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}},\\
AK &= R,\\
AB &= f,\\
BC &= 3\,AG - AB = 3(f - h) - f = 2f - 3h.
\end{aligned}$$

Ces valeurs, substituées dans la proportion

$$\frac{MC}{AK}=\frac{BC}{AB},$$

donnent

$$\frac{4R^2-a^2}{R^2}=\frac{(2f-3h)^2}{f^2};$$

d'où l'on tire

(1) $$a^2=\frac{3h(4f-3h)}{f^2}R^2.$$

D'ailleurs on a

$$PG=R+f-h,$$

$$PG=\frac{2}{3}PQ=\frac{2}{3}\frac{a^2}{2R}=\frac{a^2}{3R};$$

égalant ces deux expressions de PG, il vient

(2) $$a^2=3R(R+f-h).$$

L'élimination de R entre les équations (1) et (2) fait connaître a :

$$a=\frac{f\sqrt{3h(4f-3h)}}{3h-f};$$

les mêmes équations donnent aussi cette valeur remarquable de R :

$$R=\frac{f^2}{3h-f}.$$

Pour achever de déterminer le triangle, il faut calculer le côté b. A cet effet, remarquons que la bissectrice MB divise aussi en deux parties égales l'angle AMC, puisque les angles BMC, BKA sont égaux comme alternes-internes, et que BKA est égal à AMB à cause de l'isocélisme du triangle MAK. On conclut de là que les angles CMQ, AMP sont égaux. Les triangles isocèles MCN, MAP sont donc semblables, et l'on a entre les côtés homologues,

$$\frac{b}{a} = \frac{MC}{MA}.$$

Mais

$$\frac{MC}{MA} = \frac{BC}{BA} = \frac{2f - 3h}{f};$$

donc

$$\frac{b}{a} = \frac{2f - 3h}{f},$$

d'où

$$b = a\,\frac{2f - 3h}{f},$$

enfin

$$b = \frac{(2f - 3h)\sqrt{3h(4f - 3h)}}{3h - f}.$$

Ces formules se construisent sans difficulté par moyennes et quatrièmes proportionnelles. Elles supposent $f < 3h$, autrement les valeurs de a, b, R, seraient négatives. La condition $f < 3h$ équivaut à celle-ci :

$$2f - 3h < f,$$

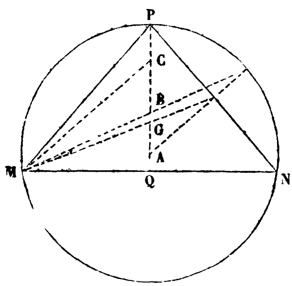
ou encore

$$b < a,$$

d'après la proportion établie plus haut. Ainsi les formules précédentes répondent au *cas où les côtés égaux du triangle isocèle* MNP *sont plus grands que la base*, ce qui a lieu dans la *fig.* 1.

Dans le cas contraire (*fig.* 2), les quatre points A, G,

Fig 2.



B, C, quoique *se succédant toujours dans le même ordre,* sont disposés inversement par rapport à la base. L'équation (1) ne change pas; mais l'équation (2) devient

$$a^2 = 3\,\mathrm{R}\,(\mathrm{R} + h - f).$$

Il en résulte un simple changement de signe dans le dénominateur commun des valeurs trouvées plus haut pour a, b, R: il faut écrire $(f - 3h)$ au lieu de $(3h - f)$; et, en effet, on a dans ce cas $f > 3h$.

Si l'on supposait $f = 3h$, les formules précédentes se présenteraient sous la forme $\frac{\mathrm{A}}{0}$; cependant la proportion

$$\frac{b}{a} = \frac{2f - 3h}{f}$$

donne alors

$$a = b.$$

Pour interpréter ces résultats, remontons aux équations (1) et (2). Elles se réduisent, dans l'hypothèse $f = 3h$, à

$$a^2 = 3\,\mathrm{R}^2, \qquad a^2 = 3\mathrm{R}\,(\mathrm{R} + 2h):$$

équations contradictoires, à moins que l'on n'ait

$$h = 0,$$

et, par suite,

$$f = 0.$$

S'il en est ainsi, les deux équations s'accordent à donner

$$a = \mathrm{R}\sqrt{3},$$

valeur qui appartient au triangle équilatéral, et le rayon R reste indéterminé.

En effet, on sait que dans tout triangle équilatéral, les quatre points A, B, G, C sont confondus en un seul.

En résumé, selon qu'on aura

$$f < 3h \quad \text{ou} \quad f > 3h,$$

le triangle isocèle aura son côté plus grand ou plus petit que sa base : on ne saurait avoir $f = 3h$, à moins que les distances f et h ne soient nulles, auquel cas le triangle est équilatéral, et son côté reste indéterminé.