

ABADIE

## Solution de la question 296

*Nouvelles annales de mathématiques 1<sup>re</sup> série*, tome 14  
(1855), p. 142-145

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1855\\_1\\_14\\_\\_142\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1855_1_14__142_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1855, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

---

## SOLUTION DE LA QUESTION 296

(voir p. 50);

PAR M. ABADIE,  
Capitaine d'artillerie.

---

La question peut s'énoncer ainsi : Étant donnés deux systèmes chacun de sept points dans un même plan, trouver deux nouveaux points  $P$  et  $P'$  tels, que si l'on joint le point  $P$  aux points du premier système et le point  $P'$  aux points correspondants du second système, les faisceaux résultants soient homographiques. Le caractère de deux droites correspondantes dans deux faisceaux homographiques étant qu'à l'une d'elles dans le premier faisceau

n'en correspond qu'une seule dans le second, il s'ensuit que  $m$  et  $m'$  étant les coefficients angulaires de ces deux droites, on aura la relation

$$(1) \quad A m m' + B m + C m' + D = 0,$$

$A, B, C, D$  étant des constantes inconnues, les mêmes pour deux droites correspondantes quelconques. Comme de plus, si l'on désigne par  $x, y$  et  $x', y'$  les coordonnées des points  $P$  et  $P'$ , et par  $a_n, b_n$  et  $a'_n, b'_n$  les coordonnées de deux points quelconques donnés correspondants dans les deux systèmes, on aura

$$m = \frac{y - b_n}{x - a_n}, \quad m' = \frac{y' - b'_n}{x' - a'_n},$$

l'équation se changera en

$$(2) \quad \begin{cases} (y - b_n) [A(y' - b'_n) + B(x' - a'_n)] \\ + (x - a_n) [C(y' - b'_n) + D(x' - a'_n)] = 0; \end{cases}$$

en faisant successivement

$$n = 1, 2, 3 \dots 7,$$

on aura les sept équations entre les sept inconnues  $x, y, x', y', \frac{B}{A}, \frac{C}{A}, \frac{D}{A}$ .

Des six premières équations éliminons les cinq dernières inconnues; à cet effet, multiplions les six premières équations par les six coefficients indéterminés  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6$  et en posant

$$\begin{aligned} \lambda_1 (y - b_1) + \lambda_2 (y - b_2) + \dots + \lambda_6 (y - b_6) &= 0, \\ \lambda_1 (x - a_1) + \lambda_2 (x - a_2) + \dots + \lambda_6 (x - a_6) &= 0, \\ \lambda_1 b'_1 (y - b_1) + \lambda_2 b'_2 (y - b_2) + \dots + \lambda_6 b'_6 (y - b_6) &= 0, \\ \lambda_1 a'_1 (y - b_1) + \lambda_2 a'_2 (y - b_2) + \dots + \lambda_6 a'_6 (y - b_6) &= 0, \\ \lambda_1 b'_1 (x - a_1) + \lambda_2 b'_2 (x - a_2) + \dots + \lambda_6 b'_6 (x - a_6) &= 0, \\ \lambda_1 a'_1 (x - a_1) + \lambda_2 a'_2 (x - a_2) + \dots + \lambda_6 a'_6 (x - a_6) &= 0, \end{aligned}$$

on aura pour l'équation cherchée entre  $x$  et  $y$ ,

$$(3) \text{ o} = \text{déter.} \begin{cases} (y-b_1), & (y-b_2), & (y-b_3), & (y-b_4), & (y-b_5), & (y-b_6), \\ b'_1(y-b_1), & b'_2(y-b_2), & b'_3(y-b_3), & b'_4(y-b_4), & b'_5(y-b_5), & b'_6(y-b_6), \\ a'_1(y-b_1), & a'_2(y-b_2), & a'_3(y-b_3), & a'_4(y-b_4), & a'_5(y-b_5), & a'_6(y-b_6), \\ (x-a_1), & (x-a_2), & (x-a_3), & (x-a_4), & (x-a_5), & (x-a_6), \\ b'_1(x-a_1), & b'_2(x-a_2), & b'_3(x-a_3), & b'_4(x-a_4), & b'_5(x-a_5), & b'_6(x-a_6), \\ a'_1(x-a_1), & a'_2(x-a_2), & a'_3(x-a_3), & a'_4(x-a_4), & a'_5(x-a_5), & a'_6(x-a_6); \end{cases}$$

équation du sixième degré, mais dans laquelle  $x$  et  $y$  ne dépassent pas le troisième degré.

Si l'on examine l'équation (3) avec attention et qu'on se rappelle qu'un déterminant est nul quand deux lignes horizontales sont les mêmes, on verra facilement que les coefficients des termes du sixième, cinquième et quatrième degré sont nuls; de sorte que l'équation n'est plus que du troisième degré.

Si dans le déterminant on pose

$$x = a_n, \quad y = b_n,$$

$n$  étant un quelconque des six premiers nombres, ce déterminant devient identiquement nul; ce qui est d'ailleurs une conséquence de l'équation (2): il s'ensuit que la courbe passe par les points  $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$  du premier système P.

Si dans l'équation de la courbe, on échange respectivement  $a_6, b_6, a'_6, b'_6$  en  $a_7, b_7, a'_7, b'_7$ , on aura une seconde courbe du troisième degré passant par les points  $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_7, P$ .

Éliminant  $y$  entre ces deux équations, on obtiendra une équation en  $x$  du neuvième degré; mais comme les deux courbes ont en commun les points  $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$ , l'équation en  $x$  sera divisible par  $(x-a_1), (x-a_2), (x-a_3), (x-a_4), (x-a_5)$  et pourra être réduite à une

équation du quatrième degré. Connaissant les valeurs de  $x$ , on sait par la méthode d'Abel, soit plus facilement par celle de M. Richelot, ou même par le procédé de M. Sylvester, en tirer linéairement les valeurs correspondantes de  $y$ .

Quant à la réduction de l'équation en  $x$  au troisième degré, je n'ai jusqu'ici trouvé rien de satisfaisant (\*).

---