

ANGELO GENOCCHI

Démonstration de quelques propositions d'arithmétique d'après Euclide

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 13
(1854), p. 426-428

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1854_1_13__426_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1854, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

DÉMONSTRATION DE QUELQUES PROPOSITIONS D'ARITHMÉTIQUE D'APRÈS EUCLIDE;

PAR M. ANGELO GENOCCHI.

Une propriété des nombres, dont on ne peut se passer même dans les éléments, c'est que *le produit de deux nombres premiers avec un troisième est premier avec ce troisième nombre*. Pour l'établir, je donne la préférence à la démonstration d'Euclide, qui me paraît la plus simple, et qu'on abrège beaucoup par l'emploi des notations modernes. Il est vrai qu'on a besoin de prouver d'abord quelques autres propositions; mais celles-ci ne sont pas sans intérêt: au contraire, je les crois essentielles dans la théorie de la réduction des fractions. Cette démonstration revient à ce qui suit.

1. Si $\frac{a}{b}$ est la plus simple des fractions équivalentes à une fraction déterminée $\frac{p}{q}$, a sera un diviseur de p , et b un diviseur de q . ●

Démonstration. Si a est un diviseur de p , on aura

$$p = ma,$$

m étant entier; mais

$$\frac{a}{b} = \frac{p}{q},$$

et, par suite,

$$\frac{a}{b} = \frac{ma}{q},$$

d'où

$$q = mb:$$

donc b sera aussi un diviseur de q . Si a n'est pas un diviseur de p , divisons p par a , et soient m le quotient, a' le reste : nous aurons

$$p = ma + a',$$

et comme $\frac{q}{b} = \frac{p}{a}$, il s'ensuivra

$$\frac{q}{b} = m + \frac{a'}{a}.$$

Or, la fraction $\frac{a'}{a}$ étant inférieure à l'unité, il est clair qu'en divisant q par b on obtiendra m pour quotient entier avec un reste $b' < b$, et qu'ainsi

$$\frac{q}{b} = m + \frac{b'}{b}.$$

En comparant les deux valeurs de $\frac{q}{b}$, on a

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b}, \quad \text{ou} \quad \frac{a'}{b'} = \frac{a}{b} = \frac{p}{q} :$$

on trouverait donc une fraction $\frac{a'}{b'}$ équivalente à $\frac{p}{q}$ et plus simple que $\frac{a}{b}$.

2. Si p et q sont deux nombres premiers entre eux, $\frac{p}{q}$ sera la plus simple de toutes les fractions ayant même valeur.

Car, si la plus simple était une autre fraction $\frac{a}{b}$, a serait un diviseur de p , et b un diviseur de q (1), et l'on aurait

$$p = ma, \quad q = mb,$$

m étant un entier supérieur à l'unité : par conséquent, p et q auraient un facteur commun m .

3. Si b est premier avec a , b sera premier avec tout nombre c diviseur de a .

En effet, si b et c avaient un facteur commun d , ce facteur diviserait exactement a qui est un multiple de c : on aurait donc

$$b = md, \quad a = nd,$$

et d serait un diviseur commun de a et b .

4. Si a et b sont premiers avec c , leur produit $ab = p$ sera aussi premier avec c .

Démonstration. Supposons que p et c aient un diviseur commun q ; a , premier avec c , sera premier avec q diviseur de c (3), et, d'ailleurs, on aura

$$p = mq,$$

m étant entier, ou

$$ab = mq,$$

d'où

$$\frac{a}{q} = \frac{m}{b}.$$

Donc $\frac{a}{q}$ sera la plus simple des fractions équivalentes à $\frac{m}{b}$ (2); donc q sera un diviseur de b (1). Ainsi b et c auraient un diviseur commun q , tandis qu'ils sont donnés comme premiers entre eux.

Ces quatre théorèmes coïncident, dans le même ordre, avec les propositions 21, 23, 25, 26 du VII^e livre d'Euclide, et je n'ai changé que la démonstration du premier théorème. Le troisième pourrait être omis comme assez évident.
