

LEBESGUE

Arithmologie. Théorème sur une équation du second degré

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 13 (1854), p. 412-413

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1854_1_13__412_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1854, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ARITHMOLOGIE.
THÉORÈME SUR UNE ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ;
PAR M. LEBESGUE.

1. LEMME. *Tout nombre de la forme $4n + 2$ est décomposable en trois carrés (voir LEGENDRE, *Théorie des Nombres*, 2^e édition, tome I, page 393).*

Observation. Ce théorème est énoncé par Euler dans une lettre à Goldbach, datée de Berlin, 25 juin 1748 (*Corresp. math. et physique*, tome I, page 448). Il ajoute qu'il a vérifié que tout nombre de la forme $4n + 1$ ou de la forme $4n + 2$ est la somme de trois carrés (zéro non exclu); mais qu'il n'a pas pu encore en trouver la démonstration. On la doit à Legendre (*Hist. de l'Acad. de Paris*, 1785, page 507; voir aussi *Disquisitiones arithmeticae*, page 504).

2. THÉORÈME. *N étant un nombre entier positif, on peut toujours satisfaire à l'équation*

$$4mn - m - n + x^2 + y^2 + z^2 = N. \quad (\text{EULER.})$$

Démonstration. Cette équation peut se mettre sous la

forme

$$[2(m+n)-1]^2 - 4(m-n)^2 + 4x^2 + (2y+1)^2 = 4N+2;$$

d'où

$$[2(m+n)-1]^2 + 4x^2 + (2y+1)^2 = 4[N + (m-n)^2] + 2.$$

Le membre à droite est de la forme $4p+2$; donc, d'après le lemme, il est décomposable en trois carrés dont l'un doit être évidemment pair.
