

FRANÇOIS BRIOSCHI

Solutions des questions 285-286

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 13
(1854), p. 402-409

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1854_1_13__402_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1854, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOLUTION DES QUESTIONS 285-286

(voir t. XII, p. 444);

PAR M. FRANÇOIS BRIOSCHI,

Professeur à l'Université de Pavie.

Je me propose, dans cette Note, la démonstration des théorèmes suivants :

$u = 0$ est l'équation rendue homogène d'une courbe plane de degré m entre trois coordonnées linéaires.

1°. *Lorsque le déterminant (HESSIEN) Δ de la fonction u est identiquement nul, l'équation représente un faisceau de m droites.*

2°. *Les points d'intersection des courbes représentées par les équations*

$$u = 0, \quad \Delta = 0,$$

sont des points d'inflexion ou des points doubles pour la première courbe.

$v = 0$ est l'équation rendue homogène d'une courbe plane de la classe n entre trois coordonnées tangentielles ()*

(*) Rappelons que $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}$ étant les coordonnées à l'origine d'une tangente à une courbe, une équation entre x_1 et x_2 de degré n est l'équation de la classe n ; on la rend homogène en écrivant $\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}$ au lieu de x_1, x_2 ; le ∇ est relatif à cette sorte d'équations.

où

$$u_s = \frac{du}{dx_s}, \quad u_{i,s} = u_{s,i} = \frac{d^2 u}{dx_i dx_s}.$$

Ces formules donnent le moyen de transformer le déterminant suivant :

$$H = \begin{vmatrix} u_1, & u_{1,1}, & u_{1,2}, \dots, & u_{1,r} \\ u_2, & u_{2,1}, & u_{2,2}, \dots, & u_{2,r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_r, & u_{r,1}, & u_{r,2}, \dots, & u_{r,r} \\ 0, & u_1, & u_2, \dots, & u_r \end{vmatrix}.$$

En effet, ce déterminant peut s'écrire

$$H = \frac{1}{m-1} \begin{vmatrix} (m-1)u_1, & u_{1,1}, & u_{1,2}, \dots, & u_{1,r} \\ (m-1)u_2, & u_{2,1}, & u_{2,2}, \dots, & u_{2,r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (m-1)u_r, & u_{r,1}, & u_{r,2}, \dots, & u_{r,r} \\ 0, & u_1, & u_2, \dots, & u_r \end{vmatrix};$$

et comme, en ajoutant respectivement aux éléments de la première colonne ceux de la deuxième multipliés par $-x_1$, ceux de la troisième multipliés par $-x_2$, etc., la valeur du déterminant H ne change pas, et, ayant égard aux équations (1), on aura

$$H = \frac{1}{m-1} \begin{vmatrix} x_0 u_{1,0}, & u_{1,1}, & u_{1,2}, \dots, & u_{1,r} \\ x_0 u_{2,0}, & u_{2,1}, & u_{2,2}, \dots, & u_{2,r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_0 u_{r,0}, & u_{r,1}, & u_{r,2}, \dots, & u_{r,r} \\ x_0 u_0 - mu, & u_1, & u_2, \dots, & u_r \end{vmatrix},$$

c'est-à-dire :

$$H = -\frac{m}{m-1} u \begin{vmatrix} u_{1,1} & u_{1,2}, \dots, & u_{1,r} \\ u_{2,1} & u_{2,2}, \dots, & u_{2,r} \\ \dots & \dots & \dots \\ u_{r,1} & u_{r,2}, \dots, & u_{r,r} \end{vmatrix} + \frac{x_0}{m-1} \begin{vmatrix} u_{1,0} & u_{1,1}, \dots, & u_{1,r} \\ u_{2,0} & u_{2,1}, \dots, & u_{2,r} \\ \dots & \dots & \dots \\ u_{r,0} & u_{r,1}, \dots, & u_{r,r} \\ u_0 & u_1, \dots, & u_r \end{vmatrix}.$$

J'observe que le second de ces deux déterminants est égal au suivant :

$$\frac{1}{m-1} \begin{vmatrix} & u_{1,0} & & u_{1,1}, \dots, & & u_{1,r} \\ & u_{2,0} & & u_{2,1}, \dots, & & u_{2,r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & u_{r,0} & & u_{r,1}, \dots, & & u_{r,r} \\ (m-1)u_0 & (m-1)u_1, \dots, & (m-1)u_r \end{vmatrix};$$

ou, en répétant l'opération indiquée ci-dessus, en ayant soin toutefois de substituer les lignes aux colonnes, on aura

$$\frac{x_0}{m-1} \begin{vmatrix} u_{1,0} & u_{1,1}, \dots, & u_{1,r} \\ u_{2,0} & u_{2,1}, \dots, & u_{2,r} \\ \dots & \dots & \dots \\ u_{r,0} & u_{r,1}, \dots, & u_{r,r} \\ u_{0,0} & u_{0,1}, \dots, & u_{0,r} \end{vmatrix},$$

et, par conséquent,

$$(2) \ H = -\frac{m}{m-1} u \begin{vmatrix} u_{1,1} & u_{1,2}, \dots, & u_{1,r} \\ u_{2,1} & u_{2,2}, \dots, & u_{2,r} \\ \dots & \dots & \dots \\ u_{r,1} & u_{r,2}, \dots, & u_{r,r} \end{vmatrix} + (-1)^r \frac{x_0^2}{(m-1)^2} \Delta.$$

Analoguement, si ν est une fonction algébrique entière

rationnelle de degré n des variables $z_1, z_2, \dots, z_r$, et si l'on pose

$$K = \begin{vmatrix} \nu_1 & \nu_{1,1} & \nu_{1,2}, \dots & \nu_{1,r} \\ \nu_2 & \nu_{2,1} & \nu_{2,2}, \dots & \nu_{2,r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \nu_r & \nu_{r,1} & \nu_{r,2}, \dots & \nu_{r,r} \\ 0 & \nu_1 & \nu_2, \dots & \nu_r \end{vmatrix},$$

on aura

$$K = -\frac{n}{n-1} \nu \begin{vmatrix} \nu_{1,1} & \nu_{1,2}, \dots & \nu_{1,r} \\ \nu_{2,1} & \nu_{2,2}, \dots & \nu_{2,r} \\ \dots & \dots & \dots \\ \nu_{r,1} & \nu_{r,2}, \dots & \nu_{r,r} \end{vmatrix} + (-1)^r \frac{z_0^2}{(n-1)^2} \nabla.$$

Les déterminants Δ et ∇ sont respectivement des degrés $(r+1)(n-2)$ et $(r+1)(n-2)$.

Je suppose les variables $x_0, x_1, \dots, x_r; z_0, z_1, \dots, z_r$ liées par les deux systèmes d'équations

$$(3) \quad \begin{cases} \nu_0 = x_0, & \nu_1 = x_1, & \nu_2 = x_2, \dots, & \nu_r = x_r, \\ u_0 = z_0, & u_1 = z_1, & u_2 = z_2, \dots, & u_r = z_r. \end{cases}$$

En prenant la dérivée de chacune des équations du premier système selon $x_0, x_1, \dots, x_r$, en ayant égard aux équations du second système, on aura $(r+1)^2$ équations, lesquelles peuvent se déduire des deux suivantes :

$$\begin{aligned} \nu_{s,0} u_{s,0} + \nu_{s,1} u_{s,1} + \dots + \nu_{s,r} u_{s,r} &= 1, \\ \nu_{s,0} u_{i,0} + \nu_{s,1} u_{i,1} + \dots + \nu_{s,r} u_{i,r} &= 0, \end{aligned}$$

en posant s et $i = 0, 1, 2, \dots, r$. Ces équations nous donnent

$$(4) \quad \Delta \cdot \nabla = 1,$$

et, à cause des équations (3), on a, pour toutes les va-

leurs de $x_0, x_1, \dots, x_r$ et de $z_0, z_1, \dots, z_r$ qui satisfont aux équations $u = 0, v = 0$, la suivante :

$$x_0 z_0 + x_1 z_1 + x_2 z_2 + \dots + x_r z_r = 0.$$

J'observe que si le déterminant Hessien Δ est identiquement nul, on a, par l'équation (2),

$$\begin{vmatrix} (m-1)u_1 & u_{1,1} & \dots & u_{1,r} \\ (m-1)u_2 & u_{2,1} & \dots & u_{2,r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (m-1)u_r & u_{r,1} & \dots & u_{r,r} \\ mu & u_1 & \dots & u_r \end{vmatrix} = 0$$

identiquement, et l'équation

$$u(x_1, x_2, \dots, x_r) = 0$$

est elle-même homogène. Analoguement si $\nabla = 0$ identiquement, l'équation

$$v(z_1, z_2, \dots, z_r) = 0$$

est homogène.

Pour toutes les valeurs de $x_1, x_2, \dots, x_r$ qui satisfont à l'équation $u = 0$, et rendent $H = 0$, on a $\Delta = 0$.

Applications géométriques. Si l'on suppose $r = 2$ et $\Delta = 0$ ou $\nabla = 0$ identiquement, les équations

$$u(x_1, x_2) = 0, \quad v(x_1, x_2) = 0,$$

sont homogènes, et l'on a les théorèmes 1^{er} et 3^e.

Si l'on suppose $r = 3$ et $\Delta = 0$ ou $\nabla = 0$ identiquement, les équations

$$u(x_1, x_2, x_3) = 0, \quad v(x_1, x_2, x_3) = 0,$$

sont homogènes, et l'on a les théorèmes 5^e et 7^e (*).

(*) PLÜCKER, *System der Geometrie des Raumes*, p. 17.

En désignant par R le rayon de courbure d'une courbe plane représentée par l'équation $u = 0$, on a

$$R = \pm \frac{(u_1^2 + u_2^2)^{\frac{3}{2}}}{H}.$$

Aux points d'inflexion de cette courbe, on a $R = \infty$, par conséquent $H = 0$, et

$$(5) \quad \begin{vmatrix} u_{0,0} & u_{0,1} & u_{0,2} \\ u_{1,0} & u_{1,1} & u_{1,2} \\ u_{2,0} & u_{2,1} & u_{2,2} \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation représentant une courbe plane du degré $3(m-2)$, les points d'inflexion de la proposée seront, en général, $3m(m-2)$. Aux points doubles de la courbe $u = 0$, on a

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 0;$$

par conséquent $H = 0$, et l'équation (5) aura lieu aussi pour ces points (théorème 2^e) (*).

Aux points de rebroussement de la courbe $v = 0$, on a $R = 0$, par conséquent $H = \infty$ et $\Delta = \infty$, ou, en ayant égard à l'équation (4),

$$\begin{vmatrix} v_{0,0} & v_{0,1} & v_{0,2} \\ v_{1,0} & v_{1,1} & v_{1,2} \\ v_{2,0} & v_{2,1} & v_{2,2} \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation du degré $3(n-2)$ représente une courbe plane, et les points de rebroussement de la proposée qui, en général, seront en nombre $3n(n-2)$, seront les

(*) Voyez l'excellent Traité de M. Salmon, *On the higher plane curves*, page 72.

points d'intersection de cette courbe avec la courbe $\nu = 0$ (théorème 4^e) (*).

On doit se rappeler que les équations $u = 0$, $\nu = 0$ représentant une même courbe, on a

$$n = m(m-1).$$

En dénotant par R_1 , R_2 les rayons principaux de courbure d'une surface $u = 0$, on a

$$R_1 R_2 = \frac{(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)^2}{H}.$$

Si l'un des deux rayons est infini, on a $H = 0$, par conséquent $\Delta = 0$. Cette équation représente une surface du degré $4(m-2)$, et la ligne d'intersection de cette surface avec la surface $u = 0$ sera une ligne d'inflexion ou ligne des points paraboliques pour cette surface (théorème 6^e) (**).

Si l'un des deux rayons est nul, on a $H = \infty$; par conséquent, $\nabla = 0$. Cette équation représente une surface de la classe $4(n-2)$, et la ligne d'intersection de cette surface avec la surface $\nu = 0$ sera une ligne de rebroussement pour cette dernière surface (théorème 8^e).
