

G. BELLAVITIS

KORALEK

Seconde solution de la question 263

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 13
(1854), p. 362-366

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1854_1_13__362_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1854, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SECONDE SOLUTION DE LA QUESTION 263

(voir t. XII, p. 319);

PAR M. G. BELLAVITIS,

Professeur à l'Université de Padoue,

ET M. KORALEK.

Soit l'équation

$$3432 x^7 - 12012 x^6 + 16632 x^5 - 11550 x^4 + 4200 x^3 - 756 x^2 + 56 x - 1 = 0.$$

Posons

$$x = y + \frac{1}{2};$$

on obtient

$$3432 y^7 - 1386 y^6 + \frac{345}{2} y^5 - \frac{35}{8} y = 0.$$

Cette équation est la septième dérivée de l'équation

$$\left(y^2 - \frac{1}{4} \right)^7 = 0,$$

qui a sept racines égales à $+\frac{1}{2}$, et sept autres égales à $-\frac{1}{2}$; donc, d'après le théorème de Rolle, l'équation

donnée a sept racines réelles.

C. Q. F. D.

Note du rédacteur. Soit $A_p x^p$ le terme d'une équation; la $n^{\text{ième}}$ dérivée de ce terme est

$$p \cdot p - 1 \dots p - n + 1 \cdot A_p x^{p-n};$$

on peut donc écrire de suite la $n^{\text{ième}}$ dérivée d'une équation quelconque, et si l'équation donnée n'a que des racines

réelles, il en sera de même de l'équation dérivée dont les racines seront comprises entre celles de l'équation donnée; il est donc facile de former des équations à racines réelles irrationnelles, et comprises entre des limites données (*voir* question 191, tome VII, page 368); mais M. Koralek a déterminé la valeur des racines irrationnelles, et voulant donner un exercice, l'habile calculateur n'avait pas à s'enquérir de l'origine de l'équation, ni de sa simplification. En divisant l'équation en y par y et faisant ensuite $y^2 = z$, on obtient

$$3432 z^3 - 1386 z^2 + \frac{315}{2} z - \frac{35}{8} = 0,$$

équation du troisième degré, susceptible d'une solution trigonométrique que nous devons à M. Koralek.

L'équation peut s'écrire

$$z^3 - \frac{231}{572} z^2 + \frac{105}{2288} z - \frac{35}{27456} = 0.$$

En posant

$$z = v + \frac{231}{3 \cdot 572} = v + \frac{77}{572},$$

on obtient

$$v^3 - \frac{2772}{572^2} v + \frac{13552}{3 \cdot 572^3} = 0.$$

Soient

$$\frac{3}{4} r^2 = \frac{2772}{572^2}$$

et

$$\frac{1}{4} r^3 \sin 3\varphi = \frac{13552}{3 \cdot 572^3},$$

ou

$$r^2 = \frac{3696}{572^2}$$

(364)

et

$$r^3 \sin 3 \varphi = \frac{54208}{3.572^3},$$

on aura

$$\nu_1 = r \sin \varphi, \quad \nu_2 = r \sin (60^\circ - \varphi)$$

et

$$\nu_3 = -r \sin (60^\circ + \varphi).$$

$$\begin{aligned} \log \sin 3 \varphi &= \log 54208 - \log 3 - 3 \log 572 - 3 \log r \\ &= 4,7340634 - 0,4771213 - 8,2721880 \\ &\quad + 2,9205900 = 7,6546534 - 8,7493093 \\ &= 8,9053441 - 10; \end{aligned}$$

de là

$$3 \varphi = 4^\circ 36' 45'', 0;$$

donc

$$\varphi = 1^\circ 32' 15'',$$

et, par suite,

$$\begin{aligned} \log \nu_1 &= \log r + \log \sin \varphi = -0,9735300 + 8,4286402 - 10 \\ &= 0,4551102 - 3, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} 1^{\text{re}} \text{ racine} \quad \nu_1 &= 0,002851742. \\ \log \nu_2 &= \log r + \log \sin (60^\circ - \varphi) = \log r + \log \sin 58^\circ 27' 45'' \\ &= -0,9735300 + 9,93059145 - 10 \\ &= 0,95706145 - 2, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} 2^{\text{e}} \text{ racine} \quad \nu_2 &= 0,09058607. \\ \log (-\nu_3) &= \log r + \log \sin (60^\circ + \varphi) \\ &= \log r + \log \sin 61^\circ 32' 15'' \\ &= -0,9735300 + 9,9440527 - 10 \\ &= 0,9705227 - 2, \end{aligned}$$

donc

$$3^{\text{e}} \text{ racine} \quad \nu_3 = -0,09343782.$$

(365)

Pour avoir les valeurs de z , il suffit d'ajouter successivement aux valeurs de ν_1 , ν_2 et ν_3 , la fraction $\frac{77}{572}$.

On a

$$\frac{77}{572} = 0,134615384 \dots,$$

donc

$$z_1 = \nu_1 + 0,134615384 = 0,137467126,$$

$$z_2 = \nu_2 + 0,134615384 = 0,225201454,$$

$$z_3 = \nu_3 + 0,134615384 = 0,041177564.$$

Pour avoir les valeurs de x , il suffit d'extraire les racines carrées de z_1 , z_2 et z_3 , et d'ajouter 0,5 aux six valeurs qu'on obtient ainsi. On a

$$\sqrt{z_1} = \pm 0,370\ 765\ 595,$$

$$\sqrt{z_2} = \pm 0,474\ 553\ 953,$$

$$\sqrt{z_3} = \pm 0,202\ 922\ 557,$$

donc

$$x_{1,2} = 0,5 \pm \sqrt{z_1}, \quad x_{3,4} = 0,5 \pm \sqrt{z_2}, \quad x_{5,6} = 0,5 \pm \sqrt{z_3},$$

ou

$$x_1 = 0,870\ 765\ 595,$$

$$x_2 = 0,129\ 234\ 405,$$

$$x_3 = 0,974\ 553\ 953,$$

$$x_4 = 0,025\ 446\ 047,$$

$$x_5 = 0,702\ 922\ 557,$$

$$x_6 = 0,297\ 077\ 443$$

En les écrivant dans l'ordre ascendant de grandeur, on a

$$x_1 = 0,025\ 446\ 047,$$

$$x_2 = 0,129\ 234\ 405,$$

$$x_3 = 0,297\ 077\ 443,$$

$$x_4 = 0,702\ 922\ 557,$$

$$x_5 = 0,870\ 765\ 595,$$

$$x_6 = 0,974\ 553\ 953.$$

Nous ne pouvons pas compter beaucoup sur l'exactitude des deux dernières décimales, car nous n'avons pris les logarithmes qu'avec sept décimales; néanmoins, nous sommes portés à les croire exactes, car l'application de la méthode de Graeff nous a donné d'une manière irrécusable les valeurs qui suivent :

$$x_1 = 0,025\ 446\ (0),$$

$$x_2 = 0,129\ 234\ (4),$$

$$x_3 = 0,297\ 077\ (4),$$

$$x_4 = 0,702\ 922\ (6),$$

$$x_5 = 0,870\ 765\ (6),$$

$$x_6 = 0,974\ 554\ (0).$$
