

Théorèmes sur la décomposition des nombres en sommes de carrés

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 13 (1854), p. 360-361

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1854_1_13__360_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1854, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**THÉORÈMES SUR LA DÉCOMPOSITION DES NOMBRES EN
SOMMES DE CARRÉS.**

1. Le nombre des solutions de l'équation

$$x^2 + 2y^2 = n$$

est égal au double de l'excès du nombre des diviseurs de n qui sont de l'une des deux formes

$$8 + 1, \quad 8 + 3,$$

sur le nombre de diviseurs qui sont de la forme

$$8 + 5, \quad 8 + 7. \quad (\text{LEJEUNE-DIRICHLET.})$$

2. n est un nombre impair positif; le nombre des solutions de l'équation

$$4n = w^2 + x^2 + y^2 + z^2$$

est égal à la somme des facteurs de n , lorsque w, x, y, z sont des nombres impairs. (JACOBI.)

3. Soient m et p deux nombres premiers, et

$$p = m\pi + 1;$$

soit g une racine primitive relative au module p , et soit la congruence

$$g^e - a = p,$$

e étant l'indice de a , c'est-à-dire que, pour des exposants inférieurs à e , la congruence n'a pas lieu. Donnant à a successivement toutes les valeurs de la suite

$$1.2, \quad 2.3, \quad 3.4, \dots, \quad (p-2)(p-1)$$

(doubles des nombres triangulaires), si

a_0 est le nombre des indices e de la forme $\dot{m}$,

$$a_1 \quad \text{id.} \quad \dot{m} + 1,$$

$$a_2 \quad \text{id.} \quad \dot{m} + 2,$$

$\vdots$

$$a_i \quad \text{id.} \quad \dot{m} + i,$$

$\vdots$

$$a_{m-1} \quad \text{id.} \quad \dot{m} + m - 1,$$

nous aurons

$$2p = (a_0 - a_1)^2 + (a_1 - a_2)^2 + (a_2 - a_3)^2 + \dots + (a_{m-1} - a_0)^2.$$

(LEBESGUE.)

$$\begin{aligned} 4. (2a - b)^2 + 3b^2 &= (2b - a)^2 + 3a^2 = (a + b)^2 + 3(a - b)^2 \\ &= 4(a^2 - ab + b^2), \end{aligned}$$

un des quatre nombres $a, b, a + b, a - b$ est divisible par 3.

Observation. On a dit qu'il fallait admettre dans

$$x^2 + y^2 = 65^2,$$

comme une solution de décomposition,

$$65^2 = 65^0 + 0^2 \quad (\text{page 270}).$$

On oppose à cette assertion qu'il faudrait admettre : 1° que le zéro est un entier; 2° que chaque carré est toujours décomposable en deux carrés; 3° que le tout est égal à sa partie. Donc il semble que, pour éviter ces trois absurdités, la décomposition $65^2 + 0^2$ ne doit pas être admise. Nous répondons que, *analytiquement parlant*, zéro est le premier des *nombres entiers pairs*; que, dans le même sens, un carré est non-seulement décomposable en deux carrés, mais en mille carrés. Il y a une foule de questions, où zéro est admis *analytiquement* comme une solution (*). Je ne comprends pas la troisième objection.

(*) Par exemple, tout nombre est la somme de quatre carrés. (FERMAT.)