

PEPIN

Solution de la question 257

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 13
(1854), p. 320-323

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1854_1_13__320_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1854, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOLUTION DE LA QUESTION 257

(voir t. XI, p. 368);

PAR M. L'ABBÉ PEPIN,
du petit Séminaire d'Iseure.

Réduire à des quadratures simples la valeur de l'intégrale triple

$$S = \iiint e^{-(x^2+y^2+z^2)} x^p y^q z^r dx dy dz,$$

où les limites des variables sont déterminées d'après l'inégalité

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1. \quad (\text{STREBOR.})$$

1. Remplaçons $\frac{x^2}{a^2}$ par x , $\frac{y^2}{b^2}$ par y , $\frac{z^2}{c^2}$ par z , et, par con-

séquent, dx , dy , dz par

$$\frac{a}{2} x^{-\frac{1}{2}} dx, \quad \frac{b}{2} y^{-\frac{1}{2}} dy, \quad \frac{c}{2} z^{-\frac{1}{2}} dz;$$

nous aurons

$$S = \frac{a^{p+1} b^{q+1} c^{r+1}}{1} \iiint e^{-(a^2 x + b^2 y + c^2 z)} x^{\frac{p-1}{2}} y^{\frac{q-1}{2}} z^{\frac{r-1}{2}} dx dy dz,$$

et les limites seront déterminées d'après l'inégalité

$$x + y + z \leq 1.$$

Posons

$$\frac{p+1}{2} = l, \quad \frac{q+1}{2} = m, \quad \frac{r+1}{2} = n$$

et

$$U = \iiint e^{-(a^2 x + b^2 y + c^2 z)} x^{l-1} y^{m-1} z^{n-1} dx dy dz.$$

On aura

$$S = \frac{a^{2l} b^{2m} c^{2n}}{2^3} U.$$

2. Cette transformation faite, nous réduirons l'intégrale U par la méthode Dirichlet. Multiplions cette intégrale par l'intégrale définie

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin u \cos ku du}{u},$$

dans laquelle

$$k = x + y + z.$$

Ce facteur est égal à l'unité pour toutes les valeurs de k comprises entre -1 et $+1$; et il est nul pour toute autre valeur (DUHAMEL, *Analyse*, t. II, p. 177). Et puisque les variables ne peuvent prendre que des valeurs positives, on aura tous les éléments de l'intégrale, et ces éléments seuls, en prenant 0 et ∞ pour limites de l'intégration relativement à chaque variable. Donc

$$U = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin u du}{u} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \cos(x+y+z) u. e^{-(a^2 x + b^2 y + c^2 z)} x^{l-1} y^{m-1} z^{n-1} dx dy dz;$$

$\cos(x + \gamma + z)u$ est la partie réelle du développement de l'exponentielle $e^{(x+\gamma+z)u\sqrt{-1}}$. Soit donc

$$V = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(a^2-u\sqrt{-1})x-(b^2-u\sqrt{-1})\gamma-(c^2-u\sqrt{-1})z} x^{l-1} \gamma^{m-1} z^{n-1} dx d\gamma dz;$$

l'intégrale U sera la partie réelle de l'intégrale

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin u du}{u} V.$$

3. L'intégrale V est le produit de trois intégrales simples. Celle qui se rapporte à x est

$$\int_0^\infty e^{-(a^2-u\sqrt{-1})x} x^{l-1} dx.$$

Or, en faisant

$$\alpha_1 = \arctan \frac{b}{a} \quad \text{et} \quad r = (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}},$$

on a (MOIGNO, *Calcul intégral*, p. 309)

$$\int_0^\infty x^{l-1} e^{-(a+b\sqrt{-1})x} dx = \frac{e^{l\alpha_1\sqrt{-1}} \cdot \Gamma(l)}{r^l};$$

on a donc, en posant $\alpha = \arctan \frac{u}{a^2}$,

$$\int_0^\infty x^{l-1} e^{(a^2-u\sqrt{-1})x} dx = \frac{e^{-l\alpha\sqrt{-1}} \cdot \Gamma(l)}{(a^4 + u^2)^{\frac{1}{2}l}}.$$

On obtiendra de même les deux autres intégrales. Ainsi, en posant

$$\epsilon = \arctan \frac{u}{b^2},$$

$$\gamma = \arctan \frac{u}{c^2},$$

on aura

$$V = \frac{\Gamma(l) \Gamma(m) \Gamma(n) \cdot e^{-(l\alpha+m\epsilon+n\gamma)\sqrt{-1}}}{(a^4+u^2)^{\frac{1}{2}l} (b^4+u^2)^{\frac{1}{2}m} (c^4+u^2)^{\frac{1}{2}n}}.$$

Pour avoir la valeur de l'intégrale proposée, il faut réduire V à sa partie réelle. On aura donc

$$S = \frac{a^{2l} b^{2m} c^{2n} \Gamma(l) \Gamma(m) \Gamma(n)}{4\pi} \int_0^\infty \frac{\sin u \cos(l\alpha + m\beta + n\gamma) du}{u(a^4 + u^2)^{\frac{1}{2}l} (b^4 + u^2)^{\frac{1}{2}m} (c^4 + u^2)^{\frac{1}{2}n}}.$$

4. Si on appliquait la même méthode à l'intégrale triple

$$S' = \iiint e^{-(x^2 + y^2 + z^2)} x^p y^q z^r dx dy dz,$$

les limites étant déterminées] comme pour l'intégrale S , on trouverait

$$S' = S.$$

La même méthode s'applique aussi avec succès à toute intégrale multiple de même forme que l'intégrale S ou que l'intégrale S' , quel que soit d'ailleurs le nombre des variables, pourvu que l'inégalité d'après laquelle on doit déterminer les limites soit de même forme que l'inégalité donnée.