

P. TARDY

Solution de la question 141

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 13
(1854), p. 23-25

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1854_1_13__23_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1854, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOLUTION DE LA QUESTION 141

(voir t. VI, p. 134) ;

PAR M. P. TARDY.

•

Soient $A_r, A_{r+1}, \dots, A_{r+2}$ trois termes consécutifs d'une série récurrente. Si l'on forme la série qui a pour terme général $A_r A_{r+2} - A_{r+1}^2$, elle est aussi récurrente.

Fourier a énoncé ce théorème dans son *Analyse des*

Maintenant, supposons que A_r soit le terme général d'une série récurrente, et que $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ soient les racines de l'équation qu'on obtient en égalant à zéro le dénominateur de sa fraction génératrice; on aura

$$A_r = \frac{\epsilon_1}{\lambda_1^{r+1}} + \frac{\epsilon_2}{\lambda_2^{r+1}} + \dots + \frac{\epsilon_n}{\lambda_n^{r+1}}.$$

En changeant r en $r+k$ et en $r+h'$, et en multipliant, il viendra

$$A_{r+k} \cdot A_{r+h'} = \sum_{p=1}^{p=n} \sum_{q=1}^{q=n} \frac{\epsilon_p \epsilon_q}{\lambda_p^k \lambda_q^{h'}} \cdot \frac{1}{(\lambda_p \lambda_q)^{r+1}}.$$

Et si l'on prend $h+h'=k+k'$, on aura, en retranchant, un résultat de la forme

$$\begin{aligned} L = A_{r+k} \cdot A_{r+h'} - A_{r+h} \cdot A_{r+k'} = & B_{1,2} \frac{1}{(\lambda_1 \lambda_2)^{r+1}} + B_{1,3} \frac{1}{(\lambda_1 \lambda_3)^{r+1}} + \dots \\ & + B_{n-1,n} \frac{1}{(\lambda_{n-1} \lambda_n)^{r+1}}; \end{aligned}$$

et l'on voit que L est le terme général d'une série récurrente qui naît de la fraction

$$\frac{\varphi(x)}{(x - \lambda_1 \lambda_2)(x - \lambda_1 \lambda_3) \dots (x - \lambda_{n-1} \lambda_n)},$$

$\varphi(x)$ étant un polynôme d'un degré $= \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} - 1$.

Prenant $k=0$, $k'=2$, $h=h'=1$, on aura le théorème particulier dont il était question.