

PÉPIN

Solution de la question 275

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 12
(1853), p. 441-443

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1853_1_12__441_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1853, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOLUTION DE LA QUESTION 275

(voir t. XII, p. 259);

PAR M. L'ABBÉ PEPIN,
Du petit séminaire d'Iseure.

Le triangle ABC a un sommet fixe A, un angle constant A, les sommets B et C sont sur une droite fixe : quelle est l'enveloppe du cercle circonscrit au triangle?

Prenons pour origine le point A, et pour axe des x la perpendiculaire abaissée de ce point sur la droite fixe. Soit p la longueur de cette perpendiculaire AP, soit α l'angle que la droite AB fait avec l'axe des x . Les coordonnées des points B et C seront

$$\text{Pour B } \begin{cases} x' = p, \\ y' = p \tan \alpha; \end{cases} \quad \text{pour C } \begin{cases} x'' = p, \\ y'' = p \tan (A + \alpha). \end{cases}$$

Le cercle circonscrit, passant par l'origine A, aura pour équation

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by = 0.$$

Les coordonnées a et b du centre seront

$$b = \frac{p}{2} [\tan \alpha + \tan (A + \alpha)],$$

$$a = \frac{p}{2} [1 - \tan \alpha \cdot \tan (A + \alpha)],$$

et l'équation du cercle deviendra

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - px[1 - \tan \alpha \cdot \tan(A + \alpha)] \\ - py[\tan \alpha + \tan(A + \alpha)] = 0, \end{aligned}$$

ou bien, en séparant l'arc α , et posant $\tan A = m$,

$$(1) \quad \begin{cases} \tan^2 \alpha \cdot p(x + my) - \tan \alpha [m(x^2 - 2px + y^2) + 2py] \\ + [(x^2 + y^2) - p(x + my)] = F(x, y, \alpha) = 0. \end{cases}$$

En éliminant l'angle α entre cette équation et sa dérivée

$$\begin{aligned} \frac{dF}{d\alpha} &= \frac{2 \tan \alpha}{\cos^2 \alpha} p(x + my) \\ &- \frac{1}{\cos^2 \alpha} [m(x^2 - 2px + y^2) + 2py] = 0, \end{aligned}$$

on trouvera, pour équation de l'enveloppe,

$$\begin{aligned} [m(x^2 - 2px + y^2) + 2py]^2 - 4p(x^2 + y^2)(x + my) \\ + 4p^2(x + my)^2 = 0. \end{aligned}$$

Si, après avoir effectué les calculs indiqués et les réductions, on divise par m^2 et qu'on ait égard à la relation

$$\frac{1 + m^2}{m^2} = \frac{1 + \tan^2 A}{\tan^2 A} = \frac{1}{\sin^2 A},$$

on pourra mettre l'équation de l'enveloppe sous la forme suivante :

$$(2) \quad (x^2 + y^2) \left[(x^2 + y^2) - \frac{4p}{\sin^2 A} x + \frac{4p^2}{\sin^2 A} \right] = 0.$$

L'enveloppe cherchée se compose donc du point A et du cercle

$$\left(x - \frac{2p}{\sin^2 A} \right)^2 + y^2 = 4p^2 \cdot \frac{\cos^2 A}{\sin^4 A}.$$

C. Q. F. D.

M. Joseph Sacchi, de Pavie, donne à peu près la même solution.

M. Bellavitis, professeur à l'Université de Padoue, fonde une solution très-courte sur la théorie des figures *dérivées*, théorie encore peu connue en France, et qui aurait besoin d'être expliquée.
