Théorème sur les polygones circonscrits à une conique

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 12 (1853), p. 218-220
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1853_1_12__218_1>

THÉORÈME SUR LES POLYGONES CIRCONSCRITS A UNE CONIQUE.

1. *Lemme.* Les droites qui mesurent les distances des deux foyers d'une conique à un point pris dans le plan

(*) M. Angelo Genocchi a adressé une solution plus directe, en s'appuyant sur le théorème de Steiner.

de la conique, sont également inclinées sur des tangentes à la conique menées par ce point (Poncelet).

2. Théorème. *Un polygone d'un nombre pair de côtés étant circonscrit à une conique, le produit des distances d'un foyer aux sommets de rang impair, divisé par le produit des distances du même foyer aux sommets de rang pair, donne le même quotient pour l'un et l'autre foyer.*

Démonstration. Pour fixer les idées, prenons un hexagone circonscrit à une conique dont nous désignons les foyers par F et F'. Soient $a_1, a_2, \ldots, a_6$ les distances du point F aux sommets consécutifs 1, 2, ..., 6; $b_1, b_2, \ldots, b_6$ les mêmes distances pour le foyer F'; $p_1, p_2, \ldots, p_6$ sont les distances perpendiculaires du foyer F aux tangentes 12, 23, ..., 61; $q_1, q_2, \ldots, q_6$ les mêmes distances pour le foyer F'.

On a (*lemme* 1)

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{p_6}{q_1}, \quad \frac{a_3}{b_3} = \frac{p_2}{q_3}, \quad \frac{a_5}{b_5} = \frac{p_4}{q_5},$$

d'où l'on tire

$$\frac{a_1 a_3 a_5}{b_1 b_3 b_5} = \frac{p_2 p_4 p_6}{q_1 q_3 q_5}.$$

On trouve le même résultat pour $\frac{a_2 a_4 a_6}{b_2 b_4 b_6}$. C. Q. F. D.

Observation. M. Chasles a, le premier, fait connaître cette proposition pour le quadrilatère circonscrit, et l'a déduite des propriétés du cône à base circulaire. (*Journal de Mathématiques*, tome III, page 108; 1838.)

3. Dans la parabole, le second foyer étant à l'infini, le quotient qui s'y rapporte est égal à l'unité; on a donc cette proposition :

Un polygone d'un nombre pair de côtés étant circonscrit à une parabole, le produit des distances du foyer *aux sommets de rang impair est égal au produit des distances du foyer aux sommets de rang pair.*

4. Il est évident que le théorème 2 subsiste pour les coniques sphériques. Il suffit de substituer aux distances les sinus des distances sphériques.

5. Lorsque le nombre des côtés du polygone est impair, on peut considérer une tangente comme brisée au point de contact et y formant un angle infiniment obtus; alors le nombre des sommets devient pair, et le théorème 2 subsiste encore. Par exemple, soient le triangle ABC circonscrit, I le point de contact du côté AB, F et F′ les deux foyers; I étant pris comme un sommet, on a le quadrilatère AIBC; et appliquant le théorème, on obtient

$$\frac{\mathrm{FI.FC}}{\mathrm{FA.FB}} = \frac{\mathrm{F'I.F'C}}{\mathrm{F'A.F'B}},$$

et, dans la parabole,

$$\mathrm{FI.FC} = \mathrm{FA.FB}.$$

On déduit de là facilement le théorème suivant:

Dans tout polygone circonscrit d'un nombre impair de côtés, le produit des distances d'un foyer aux sommets, divisé par le produit des distances du même foyer aux points de contact, donne le même quotient par chaque foyer.