

CASIMIR REY

Solution de la question 250

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 11
(1852), p. 449-450

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1852_1_11__449_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1852, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOLUTION DE LA QUESTION 250

(voir t. XI, p. 46),

PAR M. CASIMIR REY,
De l'Institution Barbet

1. *Lemme.* Si l'on porte sur une droite, à partir d'un point donné, les quatre racines des deux équations

$$x^2 + px + q = 0, \quad x^2 + p'x + q' = 0,$$

racines prises avec leurs signes, et si l'on a la relation $2(q + q') = pp'$, les quatre points ainsi déterminés sont en rapport harmonique.

2. *THÉORÈME.* Quatre points étant donnés sur une droite, prenant ces points deux à deux, on obtient trois systèmes de deux couples chacun, et à chacun de ces systèmes correspond un couple de points simultanément harmoniques aux deux couples du système; les trois couples ainsi déterminés, pris deux à deux, sont harmoniques entre eux.

(OTTO HESSE.)

Démonstration. Soient quatre points consécutifs :

A, B, C, D sur une droite,

P, Q deux points simult. harmon. aux points A, B; C, D,

R, S *Id.* A, C; B, D,

T, V *Id.* A, D; B, C;

prenons un point O sur la droite; faisons

$$OA = a, \quad OB = b, \quad OC = c, \quad OD = d,$$

$$OP = p, \quad OQ = q, \quad OR = r, \quad OS = s, \quad OT = t, \quad OV = v.$$

Ann. de Mathémat., t. XI. (Décembre 1852.)

En vertu du lemme, on a

$$\begin{aligned} (1) \quad & 2(ab + pq) = (a + b)(p + q), \\ (2) \quad & 2(cd + pq) = (c + d)(p + q), \\ (3) \quad & 2(ac + rs) = (a + c)(r + s), \\ (4) \quad & 2(bd + rs) = (b + d)(r + s). \end{aligned}$$

Éliminant a entre les équations (1) et (3), on obtient

$$2(r + s)(bc + pq) + 2(p + q)(rs - bc) + (c - b)(r + s)(p + q) - 4crs + 4bpq = 0;$$

de même, en éliminant d entre les équations (2) et (4), on obtient

$$2(r + s)(bc + pq) + 2(p + q)(rs - bc) + (b - c)(r + s)(p + q) - 4brs + 4cpq = 0.$$

Soustrayant ces équations l'une de l'autre, et divisant le reste par $2(b - c)$, on a

$$(r + s)(p + q) = 2(rs + pq).$$

Donc, d'après le lemme, les points R, S, P, Q sont en rapport harmonique; on trouve de même

$$\begin{aligned} (r + s)(t + v) &= 2(rs + tv), \\ (p + q)(t + v) &= 2(pq + tv). \end{aligned} \quad \text{C. Q. E. D.}$$

Corollaire. Les six points R, S, A, B, C, D sont en involution; de même le système T, V, A, B, C, D et encore quatre autres systèmes.

Note. M. Hesse fait un emploi très-ingénieux de ce problème pour la résolution des équations biquadratiques. (Journal de M. Crelle, t. XLI, p. 263; 1851.)