

Sur les systèmes de courbes algébriques planes qui se coupent orthogonalement et sur leur confocalité ; d'après M. le professeur E.-E. Kummer

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 11 (1852), p. 426-434

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1852_1_11__426_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1852, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LES SYSTÈMES DE COURBES ALGÈBRIQUES PLANES QUI SE COUPENT ORTHOGONALEMENT ET SUR LEUR CONFOCALITÉ;

D'APRÈS M. LE PROFESSEUR E.-E. KUMMER.

(Journal de M. Crelle, t. XXXV, p. 5; 1847.)

1. Soit

$$(a) \quad f(x, y, \alpha) = 0$$

une courbe plane algébrique de degré n en α , à coordonnées rectangulaires; α est un paramètre variable; soit (X, Y) un point quelconque dans le plan des courbes, la courbe (a) passera par ce point, si nous posons

$$f(X, Y, \alpha) = 0.$$

Cette équation peut se mettre sous la forme

$$(\alpha - \alpha_1)(\alpha - \alpha_2) \dots (\alpha - \alpha_n) = 0;$$

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sont les racines de l'équation, et fonctions de X, Y ; à chacune de ces racines correspond une courbe donnée par l'équation (a) , et ces n courbes passent par le point (X, Y) ; en les prenant deux à deux, on a $\frac{n(n-1)}{2}$

systèmes de deux courbes. Parmi ces systèmes, considérons ceux où les deux courbes se coupent orthogonalement. Supposons que ce soient les courbes correspondant aux racines α_1, α_2 , et prenons l'équation

$$(\alpha - \alpha_1)(\alpha - \alpha_2) = 0,$$

ou bien

$$u\alpha^2 + v\alpha + w = 0;$$

u, v, w sont des fonctions généralement irrationnelles de X, Y . Divisant par u , et posant

$$\frac{v}{u} = 2z, \quad \frac{w}{u} = -z_1^2,$$

on a

$$(1) \quad \alpha^2 + 2\alpha z - z_1^2 = 0$$

(on verra plus loin pourquoi on introduit $+z_1^2$); z et z_1 sont des fonctions de X, Y ou de x, y , puisque la courbe (a) passe par le point (X, Y) . Il s'agit de déterminer les fonctions z, z_1 de telle sorte, que les deux courbes (α_1, α_2) se coupent orthogonalement. Faisons

$$dz = p dx + q dy, \quad dz_1 = p_1 dx + q_1 dy,$$

et différencions l'équation (1) par rapport à x et à y ; nous en tirerons

$$(2) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{p\alpha - p_1 z_1}{q\alpha_1 - q_1 z_1}.$$

A raison de l'orthogonalité, les deux valeurs de $\frac{dy}{dx}$ correspondant à α_1, α_2 , multipliées ensemble, doivent donner -1 ; exécutant la multiplication, et remplaçant $\alpha + \alpha_1$ par $-2z$ et $\alpha_1\alpha_2$ par $-z_1^2$, on obtient

$$(3) \quad z_1(p^2 + q^2 - p_1^2 - q_1^2) - 2z(pp_1 + qq_1) = 0.$$

Si l'on pouvait intégrer généralement cette équation aux différences partielles, on aurait z et z_1 en fonction de x, y , et ces valeurs, étant mises dans l'équation (1), donneraient le système des couples de courbes à intersections orthogonales. Mais cette intégrale générale n'est pas encore trouvée; cherchons des solutions particulières.

2. Posons

$$(4) \quad p^2 + q^2 - p_1^2 - q_1^2 = 0, \quad pp_1 + qq_1 = 0;$$

éliminant q_1 , on a

$$q^2 = p_1^2.$$

Ainsi

$$p_1 = \pm q \quad \text{et} \quad q_1 = \mp p.$$

Différentiant la première de ces équations par rapport à y , et la seconde par rapport à x , on a

$$s'_1 = \pm t, \quad s'_1 = \mp r,$$

où r, s, t, r', s', t' sont, d'après les notations, les coefficients différentiels de z et x_1 ; donc

$$r + t = 0.$$

L'intégrale complète de cette équation est

$$(5) \quad z = f(x + iy) + f(x - iy) - iF(x + iy) + iF(x - iy)$$

(LACROIX, *Calcul différentiel*, t. II, p. 583, 2^e édition; 1814).

On a

$$\frac{dz}{dx} = \pm \frac{dz_1}{dy};$$

d'où l'on tire

$$(6) \quad z_1 = if(x + iy) - if(x - iy) + F(x + iy) - F(x - iy).$$

On omet le double signe, qui n'importe pas à notre sujet;

$$i = \sqrt{-1}.$$

Ces valeurs de z et z_1 satisfont à l'équation (3), et aussi à l'équation

$$\alpha^2 - 2\alpha z - z_1^2 = 0.$$

Posons

$$f(x + iy) = \frac{1}{2}(x + iy) \quad \text{et} \quad F(x + iy) = 0;$$

on obtient

$$\alpha^2 + 2\alpha x - y^2 = 0;$$

système de paraboles biconfocales.

Donnant à α des valeurs quelconques, on obtient des courbes dont les intersections sont ou réelles ou imaginaires, et aux points d'intersection on a toujours le produit des $\frac{dy}{dx}$ respectifs égal à -1 ; ce qui donne une véritable intersection orthogonale, lorsque l'intersection est réelle. Nous ne répéterons plus cette observation.

Si l'on pose

$$f(x + iy) = \frac{1}{2} a (x + iy)^m, \quad F(x + iy) = \frac{1}{2} b (x + iy)^n,$$

et passant aux coordonnées polaires

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi,$$

on arrive à l'équation suivante :

$$(7) \quad \begin{cases} \alpha^2 + 2\alpha(a\rho^m \cos m\varphi + b\rho^n \sin n\varphi) \\ - (a\rho^m \sin m\varphi - b\rho^n \cos n\varphi) = 0. \end{cases}$$

3. Passons à une autre intégrale particulière de l'équation (3). A cet effet, considérons z comme une fonction de z_1 et d'une nouvelle variable z_2 à déterminer ultérieurement; faisons

$$dz_2 = p_2 dx + q_2 dy;$$

alors

$$\frac{dz}{dx} = p = \frac{dz}{dz_1} p_1 + \frac{dz}{dz_2} p_2, \quad \frac{dz}{dy} = q = \frac{dz}{dz_1} q_1 + \frac{dz}{dz_2} q_2.$$

Substituant ces valeurs de p et de q dans l'équation (3), on a

$$\begin{aligned} & \left[z_1 \left(\frac{dz}{dz_1} \right)^2 - z_1 - 2z \frac{dz}{dz_1} \right] (p_1^2 + q_1^2) + z_1 \left(\frac{dz}{dz_2} \right)^2 (p_2^2 + q_2^2) \\ & + z \left(z \frac{dz}{dz_1} \frac{dz}{dz_2} - z \frac{dz}{dz_1} \right) (p_1 p_2 + q_1 q_2) = 0. \end{aligned}$$

Si l'on pose

$$p_1 p_2 + q_1 q_2 = 0 \quad \text{et} \quad p_1^2 + q_1^2 - p_2^2 - q_2^2 = 0$$

(système dont l'intégrale est connue), l'équation se réduit à

$$(8) \quad z_1 \left[\left(\frac{dz}{dz_1} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dz_2} \right)^2 - 1 \right] - 2z \frac{dz}{dz_1} = 0,$$

qui donne immédiatement l'intégrale particulière

$$2z = 1 - z_1^2 - z_2^2;$$

d'où l'on déduit le nouveau système de courbes se coupant orthogonalement,

$$\alpha^2 - 2\alpha(1 - z_1^2 - z_2^2) - z_1^2 = 0,$$

ou bien

$$(9) \quad \frac{z_1^2}{\alpha} + \frac{z_2^2}{\alpha + 1} = 1,$$

où z_1 a la forme de z dans l'équation (5), et z_2 la forme de z_1 dans l'équation (6).

Si l'on fait

$$f(x + iy) = \frac{1}{2}(x + iy) \quad \text{et} \quad F(x + iy) = 0,$$

on a

$$\frac{x^2}{\alpha} + \frac{y^2}{\alpha + 1} = 1.$$

Faisons

$$f(x + iy) = \frac{1}{2}(x + iy)^m, \quad F(x + iy) = \frac{1}{2}b(x + iy)^n,$$

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi;$$

nous obtiendrons

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{(a\rho^m \cos m\varphi + b\rho^n \cos n\varphi)^2}{\alpha} \\ + \frac{(a\rho^m \sin m\varphi + b\rho^n \sin n\varphi)^2}{\alpha + 1} \end{array} \right. = 1,$$

équation qui fournit une classe de courbes orthogonales dont les coniques font partie.

4. Les méthodes connues fournissent l'intégrale géné-

rale de l'équation (8) (voir LACROIX, *Calcul différentiel*, t. II, p. 547-550; 2^e édition; 1814). Cette intégrale est le résultat de l'élimination de c entre les deux équations

$$(11) \quad \begin{cases} 2cz - c_1 z_1^2 - [cz_2 - \varphi(c)]^2 + 1 = 0, \\ z - cz_1^2 - [cz_2 + \varphi(c)][z_2 + \varphi'(c)] = 0, \end{cases}$$

où $\varphi(c)$ est une fonction arbitraire, et où

$$\varphi'(c) = \frac{d\varphi(c)}{dc}.$$

Éliminant z entre les deux équations (11), et substituant la valeur de z tirée de la seconde de ces équations, dans l'équation

$$\alpha^2 + 2\alpha z - z_1^2 = 0,$$

on a

$$(12) \quad \begin{cases} c_1 z_1^2 + [cz_2 + \varphi(c)][cz_2 + 2c\varphi'(c) - \varphi(c)] + 1 = 0, \\ \alpha^2 + 2\alpha[cz_2^2 + cz_2 + \varphi(c)][z_2 + \varphi'(c)] - z_1^2 = 0. \end{cases}$$

Si l'on élimine c , et si l'on met les valeurs de z_1 et z_2 en x, y données ci-dessus, on a une équation renfermant les trois fonctions arbitraires $f(x + iy)$, $F(x + iy)$ et $\varphi(c)$. On peut parvenir encore à d'autres systèmes de courbes à intersections orthogonales par divers modes d'intégrations, plus ou moins compliquées, de l'équation (3). Nous ne nous y arrêtons pas, et nous ferons l'observation suivante.

5. Nous avons déduit des deux équations spéciales

$$\alpha^2 + 2\alpha z_1 - z_2^2 = 0 \quad \text{et} \quad \frac{z_1^2}{\alpha} + \frac{z_2^2}{\alpha + 1} = 1,$$

les équations des courbes

$$\alpha^2 - 2\alpha x - y^2 = 0 \quad \text{et} \quad \frac{x^2}{\alpha} + \frac{y^2}{\alpha + 1} = 1 \quad (\S\S 2 \text{ et } 3).$$

On passe donc de ce système au précédent en rempla-

çant x par z_1 et y par z_2 . Ce remplacement a lieu dans le cas général.

En effet, soient u et u_1 deux fonctions de x et y , et supposons que

$$\varphi^2 + 2\alpha u - u_1^2 = 0$$

représente un système de courbes à intersections orthogonales; on a, d'après l'équation (3) du § 1,

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_1 \left[\left(\frac{du}{dx} \right)^2 + \left(\frac{du}{dy} \right)^2 - \left(\frac{du_1}{dx} \right)^2 - \left(\frac{du_1}{dy} \right)^2 \right] \\ - 2u \left(\frac{du}{dx} \frac{du_1}{dx} + \frac{du}{dy} \frac{du_1}{dy} \right) = 1, \end{array} \right.$$

et, réciproquement, lorsque cette équation subsiste, l'équation

$$\alpha^2 + 2\alpha u - u_1^2 = 0$$

représente un tel système. Supposons, maintenant, que u et u_1 sont des fonctions de z_1 et z_2 , et faisons, comme ci-dessus,

$$dz_1 = p_1 dx + q_1 dy, \quad dz_2 = p_2 dx + q_2 dy;$$

alors

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= \frac{du}{dz_1} p_1 + \frac{du}{dz_2} p_2, & \frac{du}{dy} &= \frac{du}{dz_1} q_1 + \frac{du}{dz_2} q_2, \\ \frac{du_1}{dx} &= \frac{du_1}{dz_1} p_1 + \frac{du_1}{dz_2} p_2, & \frac{du_1}{dy} &= \frac{du_1}{dz_1} q_1 + \frac{du_1}{dz_2} q_2. \end{aligned}$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (13), et faisant usage des deux équations

$$p_1^2 + q_1^2 - p_2^2 - q_2^2 = 0, \quad p_1 p_2 + q_1 q_2 = 0,$$

on obtient

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_1 \left[\left(\frac{du}{dz_1} \right)^2 + \left(\frac{du}{dz_2} \right)^2 - \left(\frac{du_1}{dz_1} \right)^2 - \left(\frac{du_1}{dz_2} \right)^2 \right] \\ - 2u \left(\frac{du}{dz_1} \frac{du_1}{dz_1} + \frac{du}{dz_2} \frac{du_1}{dz_2} \right) = 0. \end{array} \right.$$

Cette équation se déduit de l'équation (13), en remplaçant x par z , et y par z_1 ; c'est ce qu'il s'agissait de faire voir.

5. M. Plucker appelle *foyers* d'une courbe, des points tels, qu'en menant par ces points des tangentes à la courbe, il y ait au moins deux tangentes faisant avec l'axe des x (par conséquent avec une droite quelconque) des angles dont les tangentes trigonométriques soient $+i$ et $-i$. On suppose d'ailleurs les axes rectangulaires. Nous avons vu que, dans le système de coniques à intersections rectangulaires, les courbes ont toutes les mêmes foyers; et si nous adoptons la définition de M. Plucker, la même propriété a lieu, en général, pour tout système analogue. Dans un tel système, les courbes infiniment voisines ne doivent pas avoir d'intersections réelles; car, en ces points, les courbes ne se couperaient pas à angle droit, mais à angle nul; en d'autres termes, un tel système de courbes ne peut pas avoir d'enveloppe réelle. C'est pour cette raison que nous avons introduit le carré négatif $-z_1^2$ dans l'équation

$$z^2 + 2\alpha z - z_1^2 = 0,$$

où z et z_1 sont des fonctions de x et y ; que ces fonctions soient soumises ou non aux formes (5) et (6), pour avoir l'équation de l'enveloppe, il faut éliminer α entre cette équation et sa dérivée

$$\alpha + z = 0,$$

ce qui donne l'équation

$$z_2 + z_1^2 = 0.$$

Cette équation est celle d'une surface imaginaire qui passe par les points donnés par les équations simultanées

$$z_1 = 0, \quad z_2 = 0;$$

points qui sont les mêmes pour tout le système, et qui sa-

tisfont aux conditions de focalité établies par M. Plucker.
En effet, soient les deux courbes du système

$$\alpha^2 + 2\alpha z - z^2 = 0, \quad \beta^2 + 2\beta z - z^2 = 0,$$

on en déduit

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{p\alpha - p_1 z_1}{q\alpha - q_1 z_1} \quad \text{et} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{p\beta - p_1 z_1}{q\beta - q_1 z_1};$$

et aux points d'intersections réelles ou imaginaires de ces deux courbes, le produit des deux coefficients différentiels doit être égal à -1 ; par conséquent, lorsque β diffère infiniment peu de α , on a

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = -1, \quad \frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{-1};$$

et cela pour les points où les courbes infiniment rapprochées se coupent, par conséquent, dans tous les points donnés de l'enveloppe; donc, aux points donnés par les équations simultanées

$$z_1 = 0, \quad z_2 = 0,$$

les tangentes aux courbes du système font, avec l'axe des x , des angles dont les tangentes trigonométriques sont $+\sqrt{-1}$ et $-\sqrt{-1}$; ce qui caractérise des foyers.