

TH. LOXHAY

Solution de la question 241

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 11
(1852), p. 424-426

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1852_1_11__424_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1852, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOLUTION DE LA QUESTION 244

(voir t. X, p. 337) ;

PAR M. TH. LOXHAY,

Répétiteur à l'École militaire de Belgique.

Soit

$$T_{n+2} = aT_{n+1} - bT_n,$$

équation caractéristique d'une série récurrente; on a

$$\frac{T_{n+1}^2 - aT_nT_{n+1} + bT_n^2}{b^n} = \text{constante.} \quad (\text{EULER.})$$

Solution. L'échelle de relation de la série récurrente étant composée de deux termes, on sait que la fraction génératrice aura la forme $\frac{\alpha + \beta x}{\alpha' + \beta' x + x^2}$; cette fraction pourra se décomposer en deux fractions partielles, $\frac{A}{x - p}$

et $\frac{B}{x - q}$; de sorte que l'on aura

$$\frac{\alpha + \beta x}{\alpha' + \beta' x + x^2} = \frac{A}{x - p} + \frac{B}{x - q},$$

avec les relations

$$A = \frac{\beta p + \alpha}{p - q}, \quad B = -\frac{\beta q + \alpha}{p - q}, \quad p + q = \beta', \quad pq = \alpha'.$$

Pour déterminer les quantités a et b , il faut remarquer que le terme général de la série récurrente est donné par la formule

$$T_n = - \left(\frac{A}{p^n} + \frac{B}{q^n} \right),$$

et, par suite,

$$T_{n+1} = - \left(\frac{A}{p^{n+1}} + \frac{B}{q^{n+1}} \right),$$

$$T_{n+2} = - \left(\frac{A}{p^{n+2}} + \frac{B}{q^{n+2}} \right).$$

Substituant ces valeurs dans l'équation caractéristique, on aura

$$\frac{A}{p^{n+2}} + \frac{B}{q^{n+2}} = a \left(\frac{A}{p^{n+1}} + \frac{B}{q^{n+1}} \right) - b \left(\frac{A}{p^n} + \frac{B}{q^n} \right),$$

mais ce résultat devant subsister pour toutes les valeurs imaginables de A et B , on obtiendra, en égalant séparément les coefficients de ces quantités à zéro,

$$1 - ap + bp^2 = 0, \quad 1 - aq + bq^2 = 0;$$

d'où

$$a = \frac{p+q}{pq}, \quad b = \frac{1}{pq}.$$

Si l'on multiplie successivement T_n par $\frac{1}{p}$ et par $\frac{1}{q}$, et que l'on retranche des deux produits T_{n+1} , il viendra

$$\frac{T_n}{p} - T_{n+1} = - \frac{B}{q^n} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right),$$

$$\frac{T_n}{q} - T_{n+1} = - \frac{A}{p^n} \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p} \right);$$

multipliant encore ces deux résultats l'un par l'autre, on aura

$$\frac{T_n^2}{pq} - \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right) T_n T_{n+1} + T_{n+1}^2 = - \frac{BA}{p^n q^n} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right)^2;$$

puis, en remplaçant $\frac{p+q}{pq}$ par a , $\frac{1}{pq}$ par b , et $\frac{1}{p^n q^n}$ par b^n ,

$$\frac{bT_n^2 - aT_nT_{n+1} + T_{n+1}^2}{b^n} = -BA \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right)^2 = \text{constante.}$$
