

HENRI BARRAL

Construction du pentagone régulier, d'après M. Staudt

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 11
(1852), p. 388-390

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1852_1_11__388_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1852, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

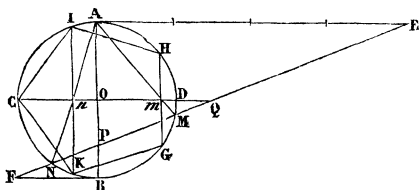
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CONSTRUCTION DU PENTAGONE RÉGULIER, D'APRÈS M. STAUDT ;

PAR M. HENRI BARRAL,
Professeur de Mathématiques.

M. Staudt a donné, sans démonstration (CRELLE, tome XXIV; 1842), la construction suivante, pour inscrire un pentagone régulier dans un cercle :

AB et CD sont deux diamètres rectangulaires ; sur la tangente en A, on prend une longueur AE quadruple du rayon ; sur la tangente en B, une longueur BF égale au rayon ; on mène la droite EF, et l'on joint les points M, N, où cette ligne coupe la circonférence, au point A. Ces droites rencontrent CD en m et n ; par ces points, on mène les cordes GH, IK parallèles à AB : le pentagone CIHGK ainsi obtenu est régulier.



Pour démontrer l'exactitude de cette construction, nous remarquerons que, dans tout pentagone régulier CIHGK, les distances Om , On sont respectivement égales aux côtés des deux décagones réguliers inscrits dans un

cercle de rayon moitié moindre; il suffit donc de faire voir que Om et On sont les côtés des décagones inscrits dans la circonférence qui aurait pour rayon $\frac{1}{2} OA$.

Désignons OA par R , Om par x , On par y .

Les triangles PAE , PBF donnent

$$PA : PB :: AE : BF;$$

donc

$$PA = \frac{8}{5} R, \quad PB = \frac{2}{5} R, \quad PO = \frac{3}{5} R.$$

Les triangles PAE , POQ donnent

$$OQ : AE :: PO : PA;$$

donc

$$QO = \frac{3}{2} R.$$

On a

$$(1) \quad Mm \cdot mA = mG \cdot mD = R^2 - x^2.$$

Les triangles MAE , MmQ donnent

$$(2) \quad \frac{MA}{Mm} = \frac{AE}{mQ} = \frac{\frac{4}{3} R}{\frac{3}{2} R - x} = \frac{8 R}{3 R - 2 x};$$

en multipliant membre à membre (1) et (2), on a

$$AM \cdot Am = (R^2 - x^2) \frac{8 R}{3 R - 2 x}.$$

Or les triangles AOm , AMB donnent

$$AM \cdot Am = 2 R^2;$$

donc

$$2 R^2 = (R^2 - x^2) \frac{8 R}{3 R - 2 x},$$

d'où l'on tire

$$(3) \quad x \left(x - \frac{R}{2} \right) = \left(\frac{R}{2} \right)^2.$$

En cherchant la valeur de On , on trouve

$$(4) \quad r \left(\frac{R}{2} - r \right) = \left(\frac{R}{2} \right)^2.$$

Les valeurs absolues des racines de ces deux équations sont les mêmes, et représentent les côtés des décagones inscrits dans le cercle de rayon $\frac{R}{2}$; donc le pentagone **CIHGK** est régulier.

Note. La construction la plus simple du pentagone régulier est celle-ci. Soient OA , OB deux rayons perpendiculaires; M le milieu OA ; la différence entre BM et OM est le côté du décagone; portant cette différence de O en N sur OA , BN est le côté du pentagone (EUCLIDE, liv. XIII, prop. 9 et 10); mais la construction de M. Staudt est remarquable, parce qu'il indique une construction analogue pour la division de la circonférence en *dix-sept* parties égales. On la trouve dans le même volume du Journal de M. Crelle (tome XXIV, page 251), sans figure et sans démonstration. Des fautes typographiques rendent la description inintelligible pour moi.

Tm.