

Solution du problème de mathématiques supérieures du grand concours de 1852 ; d'après M. Gauss

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 11
(1852), p. 364-368

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1852_1_11__364_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1852, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**SOLUTION DU PROBLÈME DE MATHÉMATIQUES SUPÉRIEURES
DU GRAND CONCOURS DE 1852;**

D'APRÈS M. GAUSS.

I.

$$(1) \quad p \sin (A - P) = a,$$

$$(2) \quad p \sin (B - P) = b;$$

a, b, A, B sont donnés, il s'agit de trouver p et P .

Ces deux équations peuvent être remplacées par celles-ci :

$$p \sin (B - A) \sin (H - P) = b \sin (H - A) - a \sin (H - B),$$

$$p \sin (B - A) \cos (H - P) = b \cos (H - A) - a \cos (H - B);$$

H est un angle quelconque.

Ces deux équations donnent la valeur de l'angle $H - P$, et celle de $p \sin (B - A)$, et par conséquent p et P sont connus.

Faisant, pour simplifier, $H = A$, on a

$$p \sin (A - P) = a,$$

$$p \cos (A - P) = \frac{b - a \cos (B - A)}{\sin (B - A)};$$

on a des équations analogues, en faisant $H = B$.

Si l'on fait

$$2H = A + B,$$

on obtient

$$p \sin \left(\frac{1}{2} A + \frac{1}{2} B - P \right) = \frac{b + a}{2 \cos \frac{1}{2} (B - A)},$$

$$p \cos \left(\frac{1}{2} A + \frac{1}{2} B - P \right) = \frac{b - a}{2 \sin \frac{1}{2} (B - A)};$$

Si l'on pose $\frac{a}{b} = \tan \zeta$, il vient

$$\tan \left(\frac{1}{2} A + \frac{1}{2} B - P \right) = \tan (45^\circ + \zeta) \tan \frac{1}{2} (B - A),$$

ainsi on connaît P; et l'on trouve p , par une des formules précédentes, où

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (b + a) &= \sin (45^\circ + \zeta) \sqrt{\frac{ab}{\sin 2 \zeta}} \\ &= \frac{a \sin (45^\circ + \zeta)}{\sin \zeta \cdot \sqrt{2}} = \frac{b \sin (45^\circ + \zeta)}{\cos \zeta \cdot \sqrt{2}}, \\ \frac{1}{2} (b - a) &= \cos (45^\circ + \zeta) \sqrt{\frac{ab}{\sin 2 \zeta}} \\ &= \frac{a \cos (45^\circ + \zeta)}{\sin \zeta \cdot \sqrt{2}} = \frac{b \cos (45^\circ + \zeta)}{\sin \zeta \cdot \sqrt{2}}; \end{aligned}$$

on a encore

$$p \sin (B - A) = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos (B - A)}.$$

II.

$$p \cos (A - P) = a,$$

$$p \cos (B - P) = b,$$

mêmes données; il s'agit de trouver p et P. On remplace ces équations par celles-ci :

$$p \sin (B - A) \sin (H - P) = -b \cos (H - A) + a \cos (H - B),$$

$$p \sin (B - A) \cos (H - P) = b \sin (H - A) - a \sin (H - B);$$

le reste comme ci-dessus.

(GAUSS, *Theoria motus corporum cœlestium*, pag. 82; 1809.)

III.

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{p}{r} = 1 + e \cos (N - P), \\ \frac{p}{r'} = 1 + e \cos (N' - P), \\ \frac{p}{r''} = 1 + e \cos (N'' - P). \end{cases}$$

$r, r', r''; N, N', N''$ données; ce sont celles du problème.

Multipliant la première équation par $\sin(N'' - N')$, la seconde par $-\sin(N'' - N)$, et la troisième par $\sin(N' - N)$, et ajoutant, on a

$$p = \frac{\sin(N'' - N') - \sin(N'' - N) + \sin(N' - N)}{\frac{1}{r} \sin(N'' - N') - \frac{1}{r'} \sin(N'' - N) + \frac{1}{r''} \sin(N' - N)}$$

$$= \frac{R r' r'' r'''}{Q},$$

$$R = 4 \sin \frac{1}{2}(N'' - N') \sin \frac{1}{2}(N'' - N) \sin \frac{1}{2}(N' - N),$$

$$Q = r' r'' \sin(N'' - N') - r r'' \sin(N'' - N) + r r' \sin(N' - N),$$

$$= n - n' + n'';$$

$n - n' + n''$ est le double de l'aire du triangle qui a pour sommets les extrémités des rayons vecteurs r, r', r'' ; si cette aire est petite, p devient grand, et de légères erreurs d'observations amènent de grandes erreurs dans le calcul de p ; connaissant p , on trouve c , et ensuite P par la méthode du § II, en combinant deux quelconques des équations données.

On peut aussi trouver P directement, de cette manière : retranchant la troisième des équations (1) de la seconde, la troisième de la première, la seconde de la première, on obtient

$$\frac{\frac{1}{r'} - \frac{1}{r''}}{2 \sin \frac{1}{2}(N'' - N')} = \frac{c}{p} \sin \left(\frac{1}{2} N' + \frac{1}{2} N'' - P \right),$$

$$\frac{\frac{1}{r} - \frac{1}{r''}}{2 \sin \frac{1}{2}(N'' - N)} = \frac{c}{p} \sin \left(\frac{1}{2} N + \frac{1}{2} N'' - P \right),$$

$$\frac{\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}}{2 \sin \frac{1}{2}(N' - N)} = \frac{c}{p} \sin \left(\frac{1}{2} N + \frac{1}{2} N' - P \right):$$

deux quelconques de ces équations, à l'aide du § I, donnent les valeurs de P et de $\frac{e}{p}$; et ensuite une quelconque des équations (1) donne les valeurs de e et de p .

Combinant la première équation avec la troisième, et posant

$$\operatorname{tang} \zeta = \frac{\frac{r'}{r} - 1 \cdot \sin \frac{1}{2} (N'' - N')}{1 - \frac{r'}{r''} \cdot \sin \frac{1}{2} (N' - N)},$$

on a

$$\operatorname{tang} \left(\frac{1}{4} N + \frac{1}{2} N' + \frac{1}{4} N'' - P \right) = \operatorname{tang} (45^\circ + \zeta) \operatorname{tang} \frac{1}{4} (N'' - N);$$

P étant connu, on a

$$p = \frac{rr' [\cos (N - P) - \cos (N' - P)]}{r \cos (N - P) - r' \cos (N' - P)},$$

$$e = \frac{r' - r}{r \cos (N - P) - r' \cos (N' - P)}.$$

Pour adapter ces formules au calcul logarithmique, on écrit l'identité

$$\begin{aligned} r \cos (N - P) - r' \cos (N' - P) \\ = [r \cos (N - H) - r' \cos (N' - H)] \cos (H - P) \\ - [r \sin (N - H) - r' \sin (N' - H)] \sin (H - P), \end{aligned}$$

où H est arbitraire.

Posant

$$r \cos (N - H) - r' \cos (N' - H) = a \cos (A - H),$$

$$r \sin (N - H) - r' \sin (N' - H) = a \sin (A - H),$$

équations qui déterminent a et A ; ensuite

$$p = \frac{2 rr' \sin \frac{1}{2} (N' - N) \sin \left[\frac{1}{2} (N' + N) - P \right]}{a \cos (A - P)},$$

$$e = \frac{r' - r}{a \cos (A - P)}.$$

Si l'on prend

$$H = \frac{1}{2} (N + N'),$$

l'angle A est donné par l'équation

$$\operatorname{tang} \left(A - \frac{1}{2} N - \frac{1}{2} N' \right) = \frac{r' + r}{r' - r} \operatorname{tang} \frac{1}{2} (N' - N),$$

et l'on a de suite

$$e = - \frac{\cos \left(A - \frac{1}{2} N - \frac{1}{2} N' \right)}{\cos \frac{1}{2} (N' - N) \cos (A - P)}.$$

(GAUSS, *Theoria motus corporum cœlestium*, pag. 86.)