

PROUHET

Théorème sur l'équation cubique

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 11
(1852), p. 324-325

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1852_1_11__324_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1852, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

THÉORÈME SUR L'ÉQUATION CUBIQUE;

PAR M. PROUHET,

Professeur.

THÉORÈME. *Si l'équation du troisième degré a une racine de la forme $a + \sqrt{b}$, a et b étant des nombres commensurables, les quantités contenues sous le radical dans les formules ordinaires, deviennent des cubes parfaits (*).*

Cette proposition se trouve implicitement énoncée dans l'*Algèbre* d'Euler (art. 749); elle doit avoir été démontrée quelque part, car les analystes qui se sont exprimés sur le cas irréductible ont dû, avant tout, chercher à ramener les radicaux cubiques à la forme $a + b \sqrt{-1}$; et, voyant que cela ne pouvait se faire en général, chercher dans quel cas cette réduction est possible. Voici, au reste, comment je démontre ce théorème :

Soit

$$x^3 + px + q = 0;$$

les racines sont données par la formule

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}}.$$

Si l'on désigne par α, β, γ les trois racines, et si l'on observe que $-(4p^3 + 27q^2)$ est le dernier terme de l'équation au carré des différences, savoir :

$$+(\alpha - \beta)^2 (\alpha - \gamma)^2 (\beta - \gamma)^2,$$

on aura

$$x = \sqrt[3]{\frac{\alpha\beta\gamma}{2} + \frac{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)}{6} \sqrt{-\frac{1}{3}} + \dots}$$

(*) Tome X, page 349, on lit *carrés*. C'est une faute qui n'est pas indiquée dans l'*errata*.

Si maintenant on suppose

$$\alpha = a + \sqrt{b},$$

les deux autres racines seront nécessairement

$$\beta = a - \sqrt{b}, \quad \gamma = -2a,$$

et, par suite, la formule de résolution devient

$$x = \sqrt[3]{-a(a^2 - b) + \left(3a^2 - \frac{b}{3}\right)\sqrt{-\frac{b}{3}}} + \dots,$$

et il est facile de vérifier que

$$-a(a^2 - b) + \left(3a^2 - \frac{b}{3}\right)\sqrt{-\frac{b}{3}} = \left(-a + \sqrt{-\frac{b}{3}}\right)^3.$$

Quant à la quantité placée sous le radical carré, on voit qu'elle devient un carré parfait lorsque deux racines sont de la forme $a + b\sqrt{-3}$, $a - b\sqrt{-3}$, a et b étant commensurables. Ce qui fournirait, au besoin, un moyen de résoudre en nombres commensurables l'équation

$$x^3 + y^3 = z^3.$$