

H. FAURE

Solution de la question 148

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 11
(1852), p. 316-319

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1852_1_11__316_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1852, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOLUTION DE LA QUESTION 148

(voir t VI p 216) ,

PAR M. H. FAURE,

Lieutenant d'artillerie.

La rectification de la courbe, lieu géométrique d'un point tel que si, de ce point, on mène deux tangentes à une ellipse, l'angle qu'elles font entre elles soit constant, dépend des fonctions elliptiques. (STREBOR.)

Supposons l'ellipse rapportée à ses axes $2a$. $2b$, soit

m la tangente de l'angle constant; l'équation du lieu géométrique est

$$[x^2 + y^2 - (a^2 + b^2)]m = 2\sqrt{a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2},$$

ou en coordonnées polaires,

$$\rho^4 - 2\rho^2 \left(c^2 + \frac{4e^2 \sin^2 \omega + 4b^2}{m^2} \right) + c^4 - \frac{4a^2b^2}{m} = 0,$$

en posant

$$a^2 + b^2 = c^2, \quad a^2 - b^2 = e^2.$$

Cette équation est de la forme

$$\rho^4 - 2\rho^2 f(\omega) + k^4 = 0. \quad (\text{Voir tome IX, page 142.})$$

Soit ds l'élément de la courbe, on aura

$$ds = \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\omega} \right)^2} d\omega.$$

Si l'on différentie l'équation donnée, on trouve

$$2\rho^2 d\rho - 2f(\omega) d\rho - \rho f'(\omega) d\omega = 0,$$

$f'(\omega)$ étant la dérivée de $f(\omega)$. On tire de là

$$\left(\frac{d\rho}{d\omega} \right)^2 = \frac{\rho^2 [f'(\omega)]^2}{4 \{ \rho^4 + [f(\omega)]^2 - 2\rho^2 f(\omega) \}};$$

mais, d'après l'équation,

$$\rho^4 - 2\rho^2 f(\omega) = -k^4;$$

donc

$$\left(\frac{d\rho}{d\omega} \right)^2 = \frac{\rho^2 [f'(\omega)]^2}{4 \{ [f(\omega)]^2 - k^4 \}},$$

et

$$\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\omega} \right)^2 = \frac{\rho^2 \{ 4[f(\omega)]^2 + [f'(\omega)]^2 - 4k^4 \}}{4 \{ [f(\omega)]^2 - k^4 \}},$$

puis

$$ds = \frac{\rho d\omega}{2} \sqrt{\frac{4[f(\omega)]^2 + [f'(\omega)]^2 - 4k^4}{[f(\omega) + k^2][f(\omega) - k^2]}}.$$

D'un autre côté, l'équation de la courbe donne

$$\rho = \sqrt{f(\omega) \pm \sqrt{[f(\omega)]^2 - k^4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sqrt{f(\omega) + k^2} \pm \sqrt{f(\omega) - k^2}),$$

en faisant disparaître les radicaux superposés.

Il vient finalement

$$ds = \frac{d\omega}{2\sqrt{2}} (\sqrt{f(\omega) + k^2} \pm \sqrt{f(\omega) - k^2}) \sqrt{\frac{4[f(\omega)^2 + [f'(\omega)]^2 - 4k^4}{[f(\omega) + k^2][f(\omega) - k^2]}}$$

Si donc s et s' représentent les deux arcs qui répondent à la même valeur de l'angle ω , on trouvera

$$s + s' = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \sqrt{\frac{4(f\omega)^2 + (f'\omega)^2 - 4k^4}{f(\omega) - k^2}} d\omega,$$

$$s - s' = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \sqrt{\frac{4(f\omega)^2 + (f'\omega)^2 - 4k^4}{f(\omega) + k^2}},$$

ainsi que l'annonce M. W. Roberts à l'endroit cité.

Dans le cas qui nous occupe, $f(\omega)$ est de la forme

$$A + B \sin^2 \omega;$$

de sorte que $f'(\omega) = 2B \sin \omega \cos \omega$. On verra alors que le numérateur commun aux expressions de $s + s'$ et $s - s'$ sera de la forme

$$D + C \sin^4 \omega,$$

la quatrième puissance du sinus disparaissant. Quant au dénominateur, il sera évidemment de la forme

$$E + B \sin^2 \omega.$$

Or, l'on sait qu'une intégrale de la forme

$$z = \int \frac{\sqrt{D + C \sin^4 \omega}}{\sqrt{E + B \sin^2 \omega}} d\omega$$

dépend des fonctions elliptiques.

La seconde partie du théorème de M. W. Roberts, qui

(319)

est relative aux courbes sphériques, se démontre d'une manière analogue à celle que nous venons de donner ici ; il suffit de se rappeler que dans ce système on a

$$ds = \sqrt{\sin^2 \rho + \left(\frac{d\rho}{d\omega} \right)^2} d\omega (*).$$