LECOINTE

# Solution de la question 228

*Nouvelles annales de mathématiques 1re série*, tome 11 (1852), p. 314-316

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1852_1_11__314_1>

## SOLUTION DE LA QUESTION 228

(voir t. IX, p. 298),

PAR M. L'ABBÉ LECOINTE,
De la maison ecclésiastique de Vals

Les trois sommets A, B, C d'un triangle et les trois sommets A', B', C' d'un tétraèdre sont donnés; par un point quelconque M dans le plan du triangle ABC, on mène les droites MA, MB, MC; on prend dans l'espace un point S tel que, dans le tétraèdre SA'B'C', on ait

$$SA' = MA; \quad SB' = MB; \quad SC' = MC;$$

le lieu du point S est une surface du second degré.

(JACOBI.)

*Solution*. Posons

$$BC = a, \quad AC = b, \quad AB = c, \quad MA = f,$$
$$MB = g, \quad MC = h, \quad A'B' = m, \quad A'C' = n,$$
$$\text{angle } B'A'C' = \alpha,$$

et le point A' étant pris pour origine de trois axes rectangulaires, tels que A'B'C' soit le plan des $xy$, et A'B' l'axe

(*) La démonstration donnée page 178 est illusoire. On y reviendra.

des $y$; désignons par $x$, $y$, $z$ les coordonnées du point S.

Entre les six droites AB, AC, BC, MA, MB, MC qui joignent deux à deux les quatre points A, B, C, M, situés dans un même plan, Carnot (*Mémoire sur la relation qui existe entre les distances respectives de cinq points quelconques pris dans l'espace*) a donné (page 7) une relation qui peut se mettre facilement sous la forme suivante :

$$(1)\left\{\begin{array}{l} (f^2-h^2)[a^2(f^2-g^2)+b^2(g^2-h^2)] \\ -c^2(f^2-g^2)(g^2-h^2)-a^2(b^2+c^2-a^2)f^2 \\ -b^2(a^2+c^2-b^2)h^2-c^2(a^2+b^2-c^2)g^2+a^2b^2c^2=0. \end{array}\right.$$

Or, comme on a

$$\overline{SA'}^2=f^2=x^2+y^2+z^2,$$

$$\overline{SB'}^2=g^2=x^2+(y-m)^2+z^2,$$

$$\overline{SC'}^2=h^2=(x-n\sin\alpha)^2+(y-n\cos\alpha)^2+z^2,$$

il s'ensuit que les différences $f^2-g^2$, $f^2-h^2$, $g^2-h^2$ sont des fonctions du premier degré en $x$ et $y$; et par conséquent, la relation (1) donne une équation du second degré relativement à $x$, $y$, $z$; donc, etc.

1re *remarque*. Si l'on pose

$$A=4mn\cos\alpha(a^2-b^2-c^2)+4n^2b^2\cos^2\alpha+4m^2c^2+a^4+b^4$$
$$+c^4-2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2),$$

$$B=4n^2b^2\sin^2\alpha+a^4+b^4+c^4-2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2),$$

$$C=a^4+b^4+c^4-2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2),$$

$$D=4mn\sin\alpha(a^2-b^2-c^2)+4n^2b^2\sin 2\alpha,$$

$$\begin{aligned}E=&-2m^2n\cos\alpha(a^2-b^2-c^2)+2nb^2\cos\alpha(a^2-b^2+c^2)\\&-4n^3b^2\cos\alpha-2mn^2(a^2-b^2-c^2)+2mc^2(a^2+b^2-c^2)\\&-4m^3c^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F=&-2m^2n\sin\alpha(a^2-b^2-c^2)+2nb^2\sin\alpha(a^2-b^2+c^2)\\&-4n^3b^2\sin\alpha,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}G=&\,m^2n^2(a^2-b^2-c^2)-m^2c^2(a^2+b^2-c^2-m^2)\\&-n^2b^2(a^2-b^2+c^2-n^2)+a^2b^2c^2,\end{aligned}$$

la surface du second degré, lieu du point S, est exprimée par l'équation

$$Ay^2 + Bx^2 + Cz^2 + Dxy + Ey + Fx + G = 0.$$

2^e^ *remarque*. Si les deux triangles ABC, A'B'C' sont rectangles en A et A', c'est-à-dire si l'on a

$$a^2 = b^2 + c^2, \quad \alpha = 90^\circ,$$

l'équation (1) devient

$$\begin{aligned}4c^2(m^2 - b^2)y^2 + 4b^2(n^2 - c^2)x^2 - 4b^2c^2z^2 + 4mc^2(b^2 - m^2)y \\ + 4nb^2(c^2 - n^2)x + m^2c^2(m^2 - b^2) \\ + n^2b^2(n^2 - c^2) + b^2c^2(a^2 - m^2 - n^2) = 0,\end{aligned}$$

et elle représente une surface du second degré, ayant pour centre le point milieu de l'hypoténuse B'C'. Si l'on rapporte alors la surface à son centre et à ses axes, son équation devient

$$\begin{aligned}4c^2(m^2 - b^2)y^2 + 4b^2(n^2 - c^2)x^2 - 4b^2c^2z^2 \\ + b^2c^2(a^2 - m^2 - n^2) = 0,\end{aligned}$$

équation facile à discuter.

*Note*. MM. Vachette et Lamarle ont traité la question à peu près de la même manière.