

PH. BÉDOS

Question 248 (Goldbach)

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 11
(1852), p. 278-280

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1852_1_11__278_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1852, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

QUESTION 248 (GOLDBACH);

PAR M. PH. BÉDOS,

Elève en mathématiques supérieures, maison de l'Assomption à Nîmes.

$4mn - m - 1$ ne peut être un carré (sous-entendu m et n étant des nombres entiers).

Démonstration. Soit $4mn - m - 1 = a^2$. Si je diminue m et n de m'' et n'' , le premier membre de cette équation diminuera de $4mn'' + 4nm'' - 4m''n'' - m''$, et pour qu'après cette diminution l'expression devienne $(a-1)^2$, il faut que

$$4mn'' + 4nm'' - 4m''n'' - m'' = 2a - 1.$$

De cette équation je tire

$$4n'' = \frac{(4mn - 1)m'' - 2a + 1}{m'' - m},$$

$$4n'' = 4n - 1 + \frac{4mn - m - 2a + 1}{m'' - m};$$

et, en posant

$$m'' = 4mn - 2a + 1,$$

on a

$$n'' = n.$$

On a donc pour m'' et n'' des valeurs entières; d'où il suit que si a^2 est un carré contenu dans la formule donnée,

$(a-1)^2$ y sera aussi contenu. On arrivera ainsi aux premiers carrés 4 et 1. En posant

$$4mn - m - 1 = 1,$$

on a

$$m = \frac{2}{4n-1},$$

équation résolue en nombres entiers en faisant

$$n = 0, \quad m = -2.$$

Mais si je pose

$$4mn - m - 1 = 4,$$

d'où

$$m = \frac{5}{4n-1},$$

cette équation ne peut être résolue en nombres entiers.

Donc la formule donnée ne peut contenir le carré 4 ni aucun carré supérieur; elle contient le carré 1, et aussi, si l'on veut, le carré 0, en faisant $n = 0$ et $m = -1$.

Démonstration d'Euler.

1. *Lemme.* La somme de deux carrés n'admet pas de diviseur de la forme $4n-1$ (FERMAT).

2. L'équation

$$4mn - m - 1 = a^2$$

est impossible; il s'ensuivrait que

$$m = \frac{a^2 + 1}{4n-1},$$

ce qui est contraire au théorème précédent.

3. *Corollaire.* $\frac{a^2 + 1}{4n-1}$ est un nombre fractionnaire; donc

$$\frac{a^2 + 1}{4n-1} + 1 = \frac{a^2 + 4n}{4n-1}.$$

est aussi un nombre fractionnaire, ou bien

$$\frac{b^2 + n}{4n - 1} = \text{ nomb. fract. ;}$$

de là

$$\frac{b^2 + n}{4n - 1} + n = \frac{b^2 + 4n^2}{4n - 1} = \text{ nomb. fract. ,}$$

ou bien

$$\frac{c^2 + 4^2}{4n - 1} = \text{ nomb. fract. ;}$$

de là

$$\frac{c^2 + n^2}{4n - 1} + n^2 = \frac{c^2 + 4n^3}{4n - 1} = \text{ nomb. fract. ,}$$

ou

$$\frac{d^2 + n^3}{4n - 1} = \text{ nomb. fract. ;}$$

et, en général,

$$\frac{a^2 + n^\alpha}{4n - 1}$$

ne peut être un nombre entier m , où α est un nombre entier positif; donc l'équation

$$4mn - m - n^\alpha = a^2$$

est impossible; ainsi $a^2 + n^\alpha$ n'admet pas de diviseur de la forme $4n - 1$.

4. Euler se sert du signe $\mp$ pour désigner l'impossibilité; ainsi $x^m + y^m \mp z^m$, lorsque m n'est pas égal à 2, exprime un théorème de Fermat. Ce signe très-commode est de Goldbach; il n'a été admis, que je sache, que par Euler. C'est une impossibilité d'un autre genre que l'imaginarité.