

H. FAURE

Solution de la question 165

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 11
(1852), p. 191-192

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1852_1_11__191_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1852, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOLUTION DE LA QUESTION 165

(voir t. VI, p. 394),

PAR M. H. FAURE,

Lieutenant d'artillerie.

THÉORÈME. $\left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{x}{a}\right)^2 = 1$ étant l'équation d'une ellipse rapportée à ses axes, $\left(\frac{b}{y}\right)^2 + \left(\frac{a}{x}\right)^2 = 1$ est l'équation de la polaire réciproque de la développée de l'ellipse, relativement au cercle représenté par

$$x^2 + y^2 = a^2 - b^2.$$

Démonstration. Désignant par t, ν , les coordonnées

d'un centre de courbure, l'équation de la développée est

$$(1) \quad a^{\frac{2}{3}} t^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}} \nu^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{4}{3}}.$$

L'équation de la polaire du point (t, ν) est

$$\nu y + tx = c^2;$$

d'où

$$\nu = \frac{c^2 - tx}{y}.$$

Substituant dans l'équation (1), on trouve

$$(2) \quad a^{\frac{2}{3}} y^{\frac{2}{3}} t^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}} (c^2 - tx)^{\frac{2}{3}} = y^{\frac{2}{3}} c^{\frac{4}{3}}$$

équation d'où l'on déduit, en différentiant et simplifiant,

$$(3) \quad a^{\frac{2}{3}} y^{\frac{2}{3}} (c^2 - tx)^{\frac{1}{3}} = b^{\frac{2}{3}} t^{\frac{1}{3}} x;$$

il ne s'agit que d'éliminer t entre les équations (2) et (3).

Élevant au cube les deux membres de l'équation (3), on trouve

$$a^2 y^2 (c^2 - tx) = b^2 tx^3, \quad t = \frac{a^2 c^2 y^2}{(b^2 x^2 + a^2 y^2) x},$$

et

$$c^2 - tx = \frac{b^2 c^2 x^2}{(b^2 x^2 + a^2 y^2)}.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (2), on trouve, après avoir chassé le dénominateur,

$$(a^2 y^2 + b^2 x^2)^{\frac{1}{3}} = y^{\frac{2}{3}} x^{\frac{2}{3}},$$

ou, en élevant au cube,

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = y^2 x^2;$$

ce qui revient à

$$\left(\frac{a}{x}\right)^2 + \left(\frac{b}{y}\right)^2 = 1.$$