

LECOINTE

Solution de la question 235

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 11
(1852), p. 187-189

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1852_1_11__187_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1852, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOLUTION DE LA QUESTION 235

(voir t. X, p. 183),

PAR M. L'ABBÉ LECOINTE,

Professeur au séminaire de Vals.

Résoudre en nombres rationnels l'équation

$$x^y = y^x.$$

Solution. Supposons que $x = \frac{m}{n}$, $y = \frac{p}{q}$ soit une des solutions demandées, on aura

$$x^{\frac{p}{q}} = y^{\frac{m}{n}}, \quad \text{ou bien} \quad x^{pn} = y^{mq}$$

ou bien encore, en posant $pn = r$, $mq = t$,

$$x^r = y^t.$$

Les valeurs $x = \frac{m}{n}$, $y = \frac{p}{q}$ satisferont donc au système

des deux équations

$$x^y = y^x,$$

$$x^r = y^t.$$

Cela posé, cherchons à résoudre le système de ces deux équations; on a

$$y \log x = x \log y,$$

$$r \log x = t \log y,$$

d'où

$$\frac{y}{r} = \frac{x}{t}, \quad y = \frac{r}{t} x,$$

$$(1) \quad x = \left(\frac{r}{t}\right)^{\frac{t}{r-t}},$$

$$(2) \quad y = \left(\frac{r}{t}\right)^{\frac{r}{r-t}}.$$

Par conséquent, pour avoir toutes les solutions demandées, il n'y a qu'à choisir r et t de telle sorte que ces valeurs de x et y soient rationnelles, et pour cela, comme

$\frac{r}{r-t} = \frac{t}{r-t} + 1$, il suffira de satisfaire à l'équation

$$\frac{t}{r-t} = e,$$

e étant un nombre entier quelconque, par des valeurs entières de r et t .

Or cette équation peut se mettre sous la forme.

$$\frac{1+e}{e} = \frac{r}{t};$$

donc, pour avoir les solutions rationnelles de l'équation

$$x^y = y^x,$$

il suffira de donner à e une valeur entière quelconque,

de poser ensuite

$$r = 1 + e,$$

$$t = e,$$

et de substituer ces valeurs dans les expressions (1) et (2) de x et y , ce qui revient à prendre pour formules générales donnant les solutions de la question proposée,

$$x = \left(\frac{1 + e}{e} \right)^e, \quad y = \left(\frac{1 + e}{e} \right)^{1+e};$$

expressions dans lesquelles e désigne un nouvel entier quelconque.

Observation. Indépendamment des solutions données par les formules précédentes, l'équation proposée en admet une infinité d'autres; mais, comme elles sont évidentes, il est inutile d'en parler.

Note. Une autre solution très-bonne donnée par M. Gennochi exige une trop longue discussion.
