

O. SCHLÖMILCH

Note sur le théorème de Taylor

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 11
(1852), p. 177-182

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1852_1_11__177_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1852, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

NOTE SUR LE THÉORÈME DE TAYLOR ;

PAR M. LE D^r O. SCHLÖMILCH,

Professeur d'analyse à l'École Polytechnique de Dresde.

Quand on fait usage du théorème de Taylor pour le développement des fonctions en séries, on trouve souvent que l'on a besoin de recherches étendues pour déterminer les limites entre lesquelles subsiste le développement. On sait qu'il y a deux méthodes pour cette discussion : l'une consiste à calculer le reste de la série et à chercher les conditions sous lesquelles il converge vers la limite zéro ; mais comme ce reste est de la forme

$$\frac{x^n f^{(n)}(\theta x)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n},$$

on est forcé de développer d'abord la dérivée $f^n(x)$, ce qui exige un calcul très-incommode, dès que la fonction $f(x)$ n'est pas très-simple. L'autre méthode a été donnée par M. Cauchy ; elle n'exige pas cette discussion

du reste, elle est au contraire extrêmement simple : mais on avouera que la démonstration du théorème admirable de ce géomètre (MOIRNO, page 150) n'est pas à la portée de ceux qui font leurs premiers pas dans la science. Peut-être trouvera-t-on que le procédé que nous allons expliquer est assez simple, sans cesser d'être rigoureux.

On se convaincra sans peine, et sans le secours du calcul intégral, que toute fonction $F(x)$, dont la dérivée $F'(x)$ est constamment nulle, est nécessairement une constante; mais il n'est pas nécessaire que cette constante conserve toujours la même valeur : au contraire, si la fonction $F(x)$ offre une solution de continuité, la valeur constante de $F(x)$ ne reste pas la même, avant et après cette solution. Supposons, par exemple, que la fonction devienne discontinue pour $x = \xi$; alors l'équation $F'(x) = 0$ donne deux valeurs constantes de $F(x)$, l'une $F(0)$ pour $x < \xi$, l'autre $F(\infty)$ pour $x > \xi$ (*). On peut donc dire que l'équation $F'(x) = 0$ entraîne la suivante $F(x) = F(a)$, pourvu que x et a soient situés dans le même intervalle de continuité, mais que cette équation cesse de subsister si x et a sont situés dans de divers intervalles. Voilà tout ce dont nous avons besoin.

Supposons maintenant qu'il s'agisse de trouver la somme de la série infinie

$$(1) \quad f(x) + \frac{a-x}{1} f'(x) + \frac{(a-x)^2}{1,2} f''(x) + \dots$$

En vertu de la définition exacte de la somme d'une série infinie, ce n'est que la limite vers laquelle converge la

(*) La droite parallèle à l'axe des x change subitement de position pour $x = \xi$, mais conserve sa direction TM.

somme finie

$$f(x) + \frac{a-x}{1} f'(x) + \frac{(a-x)^2}{1 \cdot 2} f''(x) + \dots \\ + \frac{(a-x)^{n-1}}{1 \cdot 2 \dots (n-1)} f^{(n-1)}(x),$$

que nous désignons par $F(x, n)$. En prenant la dérivée, on trouve facilement

$$(2) \quad F'(x, n) = \frac{(a-x)^{n-1}}{1 \cdot 2 \dots (n-1)} f^{(n)}(x).$$

Maintenant, si nous faisons croître indéfiniment le nombre n , l'expression $F'(x, n)$ deviendra la dérivée de la série infinie ci-dessus; c'est-à-dire l'équation

$$F(x) = f(x) + \frac{a-x}{1} f'(x) + \frac{(a-x)^2}{1 \cdot 2} f''(x) + \dots$$

donne

$$F'(x) = \lim \left[\frac{(a-x)^{n-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)} f^{(n)}(x) \right].$$

Si la limite indiquée est zéro, la fonction inconnue $F(x)$ se réduit à une constante; pour la déterminer, on n'a besoin que de prendre $x = a$ dans l'équation ci-dessus, et l'on aura $F(x) = F(a) = f(a)$, et, par conséquent,

$$(3) \quad f(a) = f(x) + \frac{a-x}{1} f'(x) + \frac{(a-x)^2}{1 \cdot 2} f''(x) + \dots$$

En vertu des remarques que nous avons faites, l'existence de cette équation se trouve assujettie à deux conditions : la première condition s'exprime par l'équation

$$(4) \quad \lim \left[\frac{(a-x)^{n-1}}{1 \cdot 2 \dots (n-1)} f^{(n)}(x) \right] = 0;$$

la seconde est que la fonction $F(x)$ demeure continue, si

l'on va de $x = x$ jusqu'à $x = a$. Cette condition se peut énoncer d'une manière différente, quand on observe que la fonction $F(x)$ sera toujours continue si la dérivée $F'(x)$ jouit de la même propriété; cette dernière fonction est la limite de l'expression $F'(x, n)$; donc, si $F'(x, n)$ est continue, quel que soit le nombre n , il est clair que $F'(x)$ et, par conséquent, $F(x)$ seront de même continues. En ayant égard à la valeur (2) de $F'(x, n)$, on verra sur-le-champ que la continuité de $F'(x, n)$ n'exige que la continuité de $f^{(n)}(x)$, et l'on parvient ainsi au théorème suivant :

Quand il existe un intervalle dans lequel toutes les fonctions $f(x), f'(x), f''(x)$, etc., sont continues, alors

$$f(a) = f(x) + \frac{a-x}{1} f'(x) + \frac{(a-x)^2}{1.2} f''(x) + \dots,$$

pourvu que les valeurs x et a soient comprises dans cet intervalle et qu'elles satisfassent à la condition

$$\lim \left[\frac{(a-x)^{n-1}}{1.2 \dots (n-1)} f^{(n)}(x) \right] = 0.$$

En prenant $a = x + h$, on aura le théorème de Taylor; pour obtenir le théorème de Maclaurin, nous faisons $x = 0$, et nous remplaçons a par x ; alors on peut s'exprimer de la manière suivante :

Si les fonctions $f(x), f'(x), f''(x)$, etc., sont continues dans un intervalle qu'embrasse la valeur $x = 0$, alors il sera possible de développer la fonction $f(x)$ en série de la forme

$$(5) \quad f(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots \left[A_n = \frac{f^{(n)}(0)}{1.2 \dots n} \right];$$

ce développement subsiste pour toutes les valeurs de x qui sont comprises dans l'intervalle indiqué, et qui, en

même temps, vérifient la condition

$$(6) \quad \lim [n A_n x^{n-1}] = 0.$$

Ce théorème justifie la méthode des coefficients indéterminés, si facile à employer; il contient deux conditions différentes : l'une sert à déterminer les *fonctions* qui sont développables en séries de puissances, l'autre fait connaître les *valeurs* pour lesquelles subsiste le développement.

Pour faire voir la facilité qu'offre l'application de notre théorème, nous prenons pour exemple

$$f(x) = \cos(\mu \arcsin x);$$

on en déduit d'abord

$$(7) \quad \begin{cases} f'(x) = -\frac{\mu \sin(\mu \arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}}, \\ f''(x) = -\frac{\mu x \sin(\mu \arcsin x)}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} - \frac{\mu' \cos(\mu \arcsin x)}{1-x^2}, \end{cases}$$

et, par conséquent,

$$(1-x^2)f''(x) = x f'(x) - \mu^2 f(x).$$

En différenciant h fois cette équation, on trouvera facilement

$$(8) \quad f^{(k+2)}(x) = \frac{(2h+1)x f^{(k+1)}(x) + (k^2 - \mu^2) f^{(k)}(x)}{1-x^2}.$$

Cette équation fait reconnaître que la fonction $f^{(k+1)}(x)$ est continue entre les limites $x = -1$ et $x = +1$, si les fonctions $f^{(k+1)}(x)$ et $f^{(k)}(x)$ jouissent de la même propriété; mais, comme il est clair que les fonctions $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ n'offrent aucune solution de continuité entre ces limites, on en conclut que toutes les fonctions $f(x)$, $f'(x)$, etc., sont continues pour $-1 < x < +1$; le développement est donc possible.

Maintenant on trouve, à l'aide des formules (7) et (8) :

$$\begin{aligned} f(0) &= 1, & f'(0) &= 0, & f''(0) &= -\mu^2, \\ f'''(0) &= 0, & f^{IV}(0) &= -\mu^2(2^2 - \mu^2), \text{ etc.}, \end{aligned}$$

ce qui donne le développement

$$(9) \quad \cos(\mu \arcsin x) = 1 - \frac{\mu^2}{1 \cdot 2} x^2 - \frac{\mu^2(2^2 - \mu^2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} x^4 - \dots$$

D'ailleurs, il est facile de prouver que l'expression

$$n A_n x^{n-1},$$

c'est-à-dire

$$\frac{\mu^2(2^2 - \mu^2)(4^2 - \mu^2) \dots [(2k)^2 - \mu^2]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (2k-1)} x^{2k-1},$$

converge vers la limite zéro, en supposant

$$1 > x > -1;$$

les conditions nécessaires sont donc satisfaites par la détermination $1 > x > -1$. En prenant enfin

$$\arcsin x = z,$$

on aura

$$\cos \mu z = 1 - \frac{\mu^2}{1 \cdot 2} \sin^2 z + \frac{\mu^2(\mu^2 - 2^2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \sin^4 z - \dots,$$

$$\frac{\pi}{2} > z > -\frac{\pi}{2}.$$

Cette formule est assez connue, mais sa démonstration ordinaire est moins simple et ne s'appuie pas sur le théorème de Maclaurin.
