

TH. LOXHAY

Solution de la question 181 (Strebor)

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 11
(1852), p. 146-148

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1852_1_11__146_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1852, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOLUTION DE LA QUESTION 181 (STREBOR)

(voir t. VII, p. 137);

PAR M. TH. LOXHAY,

Répétiteur à l'École militaire de Belgique.

L'énoncé doit être rectifié de la manière suivante :
Démontrer la formule

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log(1 - \sin^2 a \sin^2 \varphi)}{\sqrt{1 - \sin^2 a \sin^2 \varphi}} d\varphi \\ & = \log \cos a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 a \sin^2 \varphi}}. \end{aligned} \right.$$

(*) On peut voir, pour ce problème, le Mémoire de J.-A. Euler, intitulé : *Recherches des mouvements d'un globe sur un plan horizontal* (Histoire de l'Académie de Berlin, année 1758, pages 284 à 353), et la *Théorie des effets du jeu de billard*, par G. Coriolis (chap. 1^{er}, pages 51 à 77).

Pour démontrer cette formule, considérons seulement le premier membre, et posons

$$(2) \quad (1 - \sin^2 a \sin^2 \varphi)(1 - \sin^2 a \sin^2 \omega) = \cos^2 a;$$

d'où

$$\sin^2 \omega = \frac{\cos^2 \varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 a \sin^2 \varphi}}.$$

Pour $\varphi = 0$, on obtient $\omega = \frac{\pi}{2}$, et pour $\varphi = \frac{\pi}{2}$, on obtient $\omega = 0$; de sorte qu'après la substitution de φ en ω , dans le premier membre de l'équation (1), l'intégrale sera encore prise entre les mêmes limites, pourvu que l'on en change le signe. De la formule (2) on tire

$$\sin^2 \varphi = \frac{\cos^2 \omega}{1 - \sin^2 a \sin^2 \omega};$$

d'où

$$d\varphi = - \frac{\cos a d\omega}{1 - \sin^2 a \sin^2 \omega}.$$

Remplaçant maintenant, dans le premier membre de la formule (1), les quantités en φ en fonction de celles en ω , on trouve, en simplifiant et en changeant le signe du second membre,

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log(1 - \sin^2 a \sin^2 \varphi)}{\sqrt{1 - \sin^2 a \sin^2 \varphi}} d\varphi \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \frac{\cos^2 a}{1 - \sin^2 a \sin^2 \omega} \frac{d\omega}{\sqrt{1 - \sin^2 a \sin^2 \omega}}. \end{aligned}$$

Mais on peut, sous le signe de l'intégrale définie, changer ω en une autre quantité variable sans modifier le résultat; changeons-y ω en φ et simplifions, on en

tire

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log(1 - \sin^2 a \sin^2 \varphi)}{\sqrt{1 - \sin^2 a \sin^2 \varphi}} d\varphi$$

$$= 2 \log \cos a \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 a \sin^2 \varphi}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log(1 - \sin^2 a \sin^2 \varphi)}{\sqrt{1 - \sin^2 a \sin^2 \varphi}} d\varphi \right];$$

d'où, enfin,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log(1 - \sin^2 a \sin^2 \varphi)}{\sqrt{1 - \sin^2 a \sin^2 \varphi}} d\varphi = \log \cos a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 a \sin^2 \varphi}}.$$
