

DIEU

Concours d'agrégation, année 1847

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 11
(1852), p. 138-146

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1852_1_11__138_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1852, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CONCOURS D'AGRÉGATION, ANNÉE 1847;

PAR M. DIEU,

Agrégé, docteur ès sciences.

COMPOSITION DE MÉCANIQUE.

Déterminer le mouvement d'une sphère pesante, homogène, sur un plan horizontal, en ayant égard au frottement, et en supposant que ce mouvement résulte de certaines vitesses initiales de translation et de rotation imprimées à la sphère d'une manière quelconque.

Nous prendrons le rayon de la sphère pour unité de

longueur. Sa masse sera désignée par m ; et le plan horizontal sur lequel elle roule sera celui des $\hat{x}\hat{y}$.

Soient, à la fin de la durée t comptée depuis le commencement du mouvement :

x, y les deux coordonnées du centre M de la sphère qui sont variables (le z est constamment égal à 1);

C le point de la sphère qui est sur le plan $\hat{x}\hat{y}$;

u, v les composantes parallèles aux axes des x et des y de la vitesse de M, dont la direction est parallèle à $\hat{x}\hat{y}$;

MA l'axe instantané de rotation, et α, β, γ les angles qui déterminent sa direction;

ω la vitesse angulaire autour de MA, et p, q, r ses composantes autour des parallèles menées de M aux trois axes.

La vitesse absolue de C est la résultante de la vitesse relative de ce point autour de MA, dirigée suivant la partie CD de la trace du plan CB, perpendiculaire à MA, sur $\hat{x}\hat{y}$, et de la vitesse du centre transportée au point C. Si cette vitesse absolue n'est pas nulle, à l'instant que l'on considère, la sphère glisse en roulant sur $\hat{x}\hat{y}$, et le frottement fait varier le mouvement; tandis que si cette vitesse est nulle, la sphère roule sans glisser, il n'y a pas de frottement, et le mouvement ne varie pas. Nous supposerons d'abord qu'il y a un frottement, dont nous désignerons par mX, mY les deux composantes parallèles aux axes des x et des y .

Les équations du mouvement du centre M sont

$$(1) \quad \frac{du}{dt} = X, \quad \frac{dv}{dt} = Y, \quad .$$

car le poids de la sphère et la résistance du plan $\hat{x}\hat{y}$ se

détruisent; et celles du mouvement de rotation autour de MA sont

$$(2) \quad \frac{dr}{dt} = 0, \quad \frac{2}{5} \frac{dq}{dt} = -X, \quad \frac{2}{5} \frac{dp}{dt} = Y,$$

car les produits de $\frac{dr}{dt}$, $\frac{dq}{dt}$, $\frac{dp}{dt}$, par le moment d'inertie $\frac{2}{5}m$ de la sphère autour d'un diamètre, sont les moments des couples dus aux composantes de la rotation autour des parallèles menées de M aux axes des coordonnées, et les moments correspondants de la force de frottement appliquée au point C sont 0, $-mX$ et mY .

Les équations (1) et (2) donnent

$$\frac{dr}{dt} = 0, \quad -\frac{dq}{dt} = \frac{5}{2} \frac{du}{dt}, \quad \frac{dp}{dt} = \frac{5}{2} \frac{dv}{dt};$$

et, en intégrant depuis $t = 0$, on a

$$(3) \quad \begin{cases} r - r_0 = 0, & -(q - q_0) = \frac{5}{2}(u - u_0), \\ p - p_0 = \frac{5}{2}(v - v_0), \end{cases}$$

u_0, v_0 , etc., étant les valeurs initiales de u, v , etc....

Il résulte de ces trois dernières équations que : *Si le mouvement de M était rectiligne et uniforme, la sphère tournerait avec une vitesse constante autour d'un de ces diamètres, pendant que ce diamètre se mouvrait parallèlement à une certaine direction.* En effet, on aurait par hypothèse $u = u_0, v = v_0$; par suite, en vertu des équations (3), $q = q_0, p = p_0$, et l'on a toujours $r = r_0$.

On voit facilement que les composantes, parallèles aux axes des x et des y , de la vitesse relative de C autour de MA, sont $-q$ et p ; celles de la vitesse absolue de ce point suivant les mêmes axes, sont donc, d'après ce qui a été

dit plus haut, $u - q$ et $v + p$. Or la direction du frottement est opposée à celle de cette vitesse; donc on a

$$\frac{X}{Y} = \frac{u - q}{v + p},$$

ou bien, en remplaçant q et p par leurs valeurs tirées des équations (3),

$$\frac{X}{Y} = \frac{u - a}{v - b},$$

si l'on représente par a et b (pour simplifier) les constantes données

$$\frac{5u_0 + 2q_0}{7} \text{ et } \frac{5v_0 - 2p_0}{7}.$$

D'ailleurs, les équations (1) donnent

$$\frac{X}{Y} = \frac{du}{dv};$$

donc on a

$$\frac{du}{u - a} - \frac{dv}{v - b} = 0,$$

et, en intégrant depuis $t = 0$,

$$(4) \quad \frac{u - a}{v - b} = \frac{u_0 - a}{v_0 - b} = \text{const.};$$

ou bien

$$\frac{X}{Y} = \text{const.}$$

Ainsi, la direction du frottement est constante. Quand la vitesse de C ne dépasse pas 4 mètres par seconde, le frottement ne dépend que de la pression (expériences de M. Morin); il est donc constant en grandeur et direction, et, par conséquent,

M décrit, au moins pendant un certain temps, et en

général, une parabole tangente à la direction de sa vitesse initiale.

f étant le coefficient du frottement et g la gravité, on a, d'après les équations précédentes,

$$(5) \quad \frac{du}{dt} = -fg \cdot \frac{u-a}{V}, \quad \frac{dv}{dt} = -fg \cdot \frac{v-b}{V},$$

en posant $V = \sqrt{(u-a)^2 + (v-b)^2}$ [$u-a$ et $v-b$ sont respectivement de mêmes signes que $u-q$ et $v+p$, par conséquent, de signes contraires à X et Y , et V doit être considérée comme positive].

D'après la première de ces équations, du et $u-a$ sont de signes contraires, de sorte que la composante u augmente ou diminue, suivant qu'elle est moindre que a ou plus grande que a ; et, d'après la seconde, on peut en dire autant de v par rapport à b ; u et v tendront donc respectivement vers a et b , et l'on aura en même temps

$$u = a, \quad v = b,$$

puisque $\frac{u-a}{v-b}$ est constant [équation (4)].

Par conséquent,

Le centre M, après avoir décrit, en général, un arc de parabole, continuera de se mouvoir avec une vitesse constante suivant la tangente menée par l'extrémité de cet arc.

V_0 désignant ce que devient V pour $u = u_0$ et $v = v_0$, il résulte de l'équation (4), que

$$\frac{u-a}{V} = \frac{u_0-a}{V_0} \quad \text{et} \quad \frac{v-b}{V} = \frac{v_0-b}{V_0},$$

et les équations (5) reviennent à

$$\frac{du}{dt} = -fg \cdot \frac{u_0-a}{V_0}, \quad \frac{dv}{dt} = -fg \cdot \frac{v_0-b}{V_0}.$$

En intégrant depuis $t = 0$, on a

$$(6) \quad u = u_0 - fg \cdot \frac{u_0 - a}{V_0} t, \quad v = v_0 - fg \cdot \frac{v_0 - b}{V_0} t,$$

qui donnent pour t la même valeur quand on y fait $u = a$ et $v = b$,

$$t = \frac{V_0}{fg} = \frac{1}{fg} \sqrt{(u_0 - a)^2 + (v_0 - b)^2}.$$

Si cette équation donnait $t = 0$, le mouvement de M serait immédiatement rectiligne et uniforme; mais, en général, $V_0 > 0$, et ce sera lorsque t atteindra la valeur $\frac{V_0}{fg}$ que le mouvement de la sphère changera de nature, comme il vient d'être dit.

En remplaçant, dans les équations (6), u et v par $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{dy}{dt}$, et intégrant de manière que $t = 0$ donne

$$x = 0, \quad y = 0,$$

ce qui revient à prendre pour origine le point où la sphère touche d'abord le plan $\hat{x}\hat{y}$, on a

$$(7) \quad x = u_0 t - \frac{1}{2} fg \frac{u_0 - a}{V_0} t^2, \quad y = v_0 t - \frac{1}{2} fg \frac{v_0 - b}{V_0} t^2;$$

et, par l'élimination de t , il vient

$$(8) \quad [(u_0 - a)y - (v_0 - b)x]^2 + \frac{V_0}{fg} (av_0 - bu_0)(u_0 y - v_0 x) = 0,$$

qui représente la parabole sur laquelle se trouve, jusqu'à $t = \frac{V_0}{fg}$, le point où la sphère touche $\hat{x}\hat{y}$. Pendant cette première partie du mouvement, on connaît: 1° les deux coordonnées de M, qui sont seules variables, par les équations (7); 2° les composantes u , v de la vitesse de M, par les équations (6); 3° les composantes p et q de la

vitesse angulaire autour de l'axe instantané, par les équations (3). La vitesse de M se déduit ensuite facilement de u et v en grandeur et direction, et l'on achève de déterminer le mouvement de la sphère sur elle-même par les formules

$$\omega = \sqrt{p^2 + q^2 + r_0^2}, \quad \cos \alpha = \frac{p}{\omega}, \quad \cos \beta = \frac{q}{\omega}, \quad \cos \gamma = \frac{r_0}{\omega}.$$

Mouvement rectiligne de M. Les coordonnées du point où la sphère touche $\hat{xy}$, quand la nature du mouvement change, se déduisent des équations (7) en y faisant

$$t = \frac{V_0}{fg}, \text{ et sont}$$

$$x = \frac{(u_0 + a) V_0}{2fg}, \quad y = \frac{(v_0 + b) V_0}{2fg}.$$

Pour $t = \frac{V_0}{2g}$, on a

$$\frac{dx}{dt} = a, \quad \frac{dy}{dt} = b,$$

d'où

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a};$$

et en prenant l'intégrale de cette dernière équation, de manière qu'elle soit satisfaite par les précédentes valeurs de x et de y , il vient

$$y = \frac{b}{a} x + \frac{(av_0 - bu_0) V_0}{2afg},$$

qui représente la droite sur laquelle se trouve le point dont il s'agit [on vérifie facilement qu'elle touche la parabole de l'équation (8)].

La vitesse de M, devenue constante, est représentée par $\sqrt{a^2 + b^2}$. On a, avec $r = r_0$, qui se rapporte aux deux

parties du mouvement,

$$p = \frac{2p_0 - 5\nu_0}{7}, \quad q = \frac{2q_0 + 5u_0}{7},$$

d'après les deux dernières équations (3); et l'on conclut facilement de ces valeurs constantes, celles de ω et de $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$, par lesquelles le mouvement de la sphère sur elle-même est déterminé dans la seconde partie.

Enfin, lorsque $u_0 = a$, $\nu_0 = b$, les trois dernières équations, qui s'appliquent depuis le commencement du mouvement, deviennent

$$y = \frac{\nu_0}{u_0} x, \quad p = -\nu_0, \quad q = u_0.$$

Remarques. 1°. L'axe instantané de rotation restera toujours parallèle à $\hat{xy}$, s'il est d'abord parallèle à ce plan, car l'hypothèse $r_0 = 0$ entraîne que $r = 0$ [équation (3)];

2°. Le mouvement de M sera tout d'abord rectiligne, non-seulement si l'on a $u_0 = a$, $\nu_0 = b$, mais encore si l'on a $\frac{a}{u_0} = \frac{b}{\nu_0} = n$, n étant un nombre quelconque, ce qui renferme le cas précédent pour lequel $n = 1$. En effet, les coefficients de t^2 , dans les équations (7), deviennent ainsi proportionnels à ceux de t , et l'élimination de t conduit à $u_0 y - \nu_0 x = 0$, que l'on peut aussi déduire de l'équation (8).

Ce mouvement reste uniformément accéléré jusqu'à ce que $t = \frac{1-n}{fg} \sqrt{u_0^2 + \nu_0^2}$; puis, passé l'instant marqué par cette valeur de t , il devient uniforme et sa vitesse est $n \sqrt{u_0^2 + \nu_0^2}$.

Le cas de $p_0 = 0$, $q_0 = 0$, c'est-à-dire dans lequel l'axe

(146)

instantané de rotation est d'abord vertical, se trouve compris dans le précédent, et il répond à $n = \frac{5}{7}$ (*).

