

DIEU

Concours d'agrégation, année 1847

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 11
(1852), p. 131-138

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1852_1_11__131_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1852, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CONCOURS D'AGRÉGATION, ANNÉE 1847;

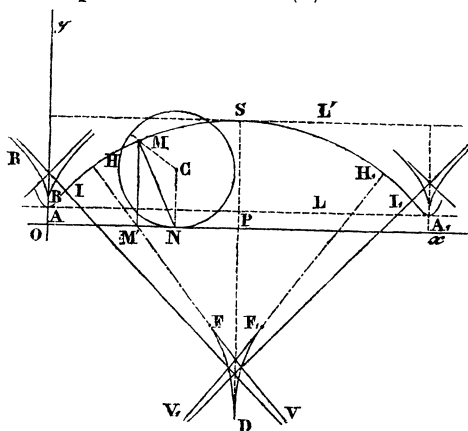
PAR M. DIEU,

Agrégé, docteur ès sciences.

COMPOSITION D'ANALYSE.

Cycloïdes allongées et raccourcies. — Tangentes. — Normales. — Rayons de courbure. — Développées. — Arc. — Segment.

I. *Cycloïdes allongées.* — Soient R le rayon du cercle, G le point intérieur qui engendre la cycloïde, et a la distance de ce point au centre C (*).



L'axe des x sera la droite fixe sur laquelle le cercle roule, et l'axe des y la perpendiculaire menée à cette

(*) Cet article, de même que le suivant, jusqu'aux rayons de courbure, sera facilement compris par les élèves de mathématiques spéciales. La figure se rapporte au cas de $n < 2$.

droite par la position A de G, où il en est à la distance minimum $R - a$.

Il est évident, à priori, que la courbe est indéfinie et comprise entre les droites L et L', dont les équations sont $y = R \mp a$; et que, le cercle roulant dans le sens des x positives, G s'éloigne de L en partant de A, atteint L en S où $x = \pi R$, puis revient sur L en A₁, après avoir décrit SA₁ symétrique de SA par rapport à l'ordonnée SP.

M(x, y) étant un point quelconque de l'arc ASA₁, qu'il suffit d'étudier, et N le point de contact correspondant du cercle avec l'axe des x ; si l'on désigne par φ l'angle MCN (qui peut s'étendre de 0 à 2π), on a les équations

$$(1) \quad x = R\varphi - a \sin \varphi \quad \text{et} \quad y = R - a \cos \varphi.$$

D'après ces équations, $y = R - a$ pour $\varphi = 0$ et $\varphi = 2\pi$, auxquelles répondent $x = 0$ et $x = 2\pi R$; le maximum de y est $y = R + a$ répondant à $\varphi = \pi$ et $x = \pi R$; enfin, x a des valeurs équi-différentes de πR , et y des valeurs égales entre elles pour des valeurs de φ équi-différentes de π .

Tangentes. — Les équations (1) donnent

$$D_{\varphi} x = R - a \cos \varphi \quad \text{et} \quad D_{\varphi} y = a \sin \varphi.$$

On a donc, en désignant par y' la dérivée $D_x y$, et posant $R = an$,

$$(2) \quad y' = \frac{\sin \varphi}{n - \cos \varphi},$$

d'où

$$D_{\varphi} y' = \frac{n \cos \varphi - 1}{(n - \cos \varphi)^2}.$$

Soit φ_1 le plus petit arc positif dont le cosinus soit

$\frac{1}{n}$ ou $\frac{a}{R}$, et soit I le point de AS correspondant à $\varphi = \varphi_1$, pour lequel $x = R\varphi_1 - a\sqrt{1 - \frac{a^2}{R^2}}$ et $y = R - a\frac{a}{R}$. On voit que, φ croissant de 0 à φ_1 , $D_\varphi y'$ est positive et y' croissant de 0 à $\frac{a}{\sqrt{R^2 - a^2}}$; et que, φ continuant de croître jusqu'à π , $D_\varphi y'$ est négative et y' décroissant jusqu'à zéro. Donc, les tangentes en A et S sont parallèles à Ox , l'arc AI est convexe et l'arc IS concave vers Ox , et il y a une inflexion en I.

Normales. — La normale en chaque point M passe par le point de contact correspondant du cercle et de l'axe des x , car l'abscisse, à l'origine de la normale, est

$$x + yy' = R\varphi,$$

d'après les équations (1) et (2).

Cette propriété, qui est commune à toutes les courbes engendrées comme les cycloïdes (*Nouvelles Annales*, tome X, page 212), conduit immédiatement à l'équation différentielle des cycloïdes allongées,

$$dx = \pm \frac{ydy}{\sqrt{a^2 - (R - y)^2}},$$

dont l'intégrale est

$$x = R \arccos \frac{R - y}{a} \mp \sqrt{a^2 - (R - y)^2}.$$

Rayon de courbure. — Le rayon de courbure en M étant désigné par ρ , en remarquant que $D_x y' = \frac{D_\varphi y'}{D_\varphi x}$, on a

$$(3) \quad \rho = \pm \frac{R}{n} \frac{(1 + n^2 - 2n \cos \varphi)^{\frac{3}{2}}}{n \cos \varphi - 1}.$$

(il faut prendre le signe + pour les arcs convexes vers

Ox, et le signe — pour les arcs concaves, si l'on veut que ρ soit positif). ρ est évidemment *minimum* en A où $\varphi = 0$ et $\rho = \frac{(R-a)^2}{a}$, et il est infini en I où $n \cos \varphi = 1$.

L'équation (3) donne

$$D_{\varphi} \rho = \pm R \sin \varphi (n \cos \varphi + n^2 - 2) \frac{(1 + n^2 - 2n \cos \varphi)^{\frac{1}{2}}}{(1 - n \cos \varphi)^2}.$$

Sur AI, $D_{\varphi} \rho$ est positive (il faut prendre le signe +). Si $n > 2$, $D_{\varphi} \rho$ est négative de I en S où elle change de signe à cause du facteur $\sin \varphi$ (il faut prendre le signe —); donc ρ est *minimum* au point S. Si $n < 2$, $D_{\varphi} \rho$, d'abord négative quand φ croît à partir de φ_1 , change de signe lorsque φ passe par la valeur φ_2 , qui est déterminée par l'équation

$$\cos \varphi = \frac{2 - n^2}{n},$$

et reste positive jusqu'à ce que φ atteigne la valeur π , puis devient ensuite négative; donc ρ est *minimum* en un point H de IS, dont les coordonnées sont

$$x = R \varphi_2 - a \sqrt{1 - \left(\frac{2a}{R} - \frac{R}{a}\right)^2} \quad \text{et} \quad y = 2 \left(R - a \frac{a}{R}\right)$$

(double de l'ordonnée du point I), et *maximum* en S.

Développées. — Il résulte de ce qui précède, que la développée de l'arc ASA₁ a des branches infinies dont les asymptotes sont les normales aux points I et I₁ (symétriques de I par rapport à SP), un point de rebroussement sur le prolongement de SP, et, quand $n < 2$, deux autres points de rebroussement qui répondent à H et à H₁ (symétrique de H par rapport à SP).

D'après les équations (1) et (2), celle de la normale en M est

$$(4) \quad y_1 \sin \varphi + x_1 (n - \cos \varphi) - R \varphi (n - \cos \varphi) = 0,$$

x_1 et y_1 étant les coordonnées courantes. Par l'élimination de φ entre cette équation, et

$$(5) \quad x_1 \cos \varphi + x_1 \sin \varphi - R(n + \varphi \sin \varphi - \cos \varphi) = 0,$$

que l'on forme en égalant à zéro la dérivée du premier membre par rapport à φ , on aurait l'équation de la développée. Mais cette équation est très-compiquée, et il serait préférable de rechercher la forme de la développée au moyen des valeurs de x_1 et y_1 qu'on tire des deux équations (4) et (5),

$$x_1 = R \left(\varphi - \frac{n - \cos \varphi}{n \cos \varphi - 1} \sin \varphi \right),$$

et

$$y_1 = R \frac{(n - \cos \varphi)^2}{n \cos \varphi - 1}.$$

Ces valeurs donnent, pour les points de rebroussement B et D, $y = R \cdot \frac{R-a}{a}$, et $y = R \cdot \frac{R+a}{a}$, qu'il est facile de construire; et, dans le cas de $n < 2$, pour le point de rebroussement C, $x = R \varphi_2 + 2a \sqrt{1 - \left(\frac{2a}{R} - \frac{R}{a} \right)^2}$, $y = -4 \left(R - a \frac{a}{R} \right)$, dont la comparaison avec les coordonnées de H montre qu'en ce point le rayon de courbure est triple de la normale.

On voit, du reste, par la discussion même de la cycloïde, que la développée a : 1° une branche infinie BR, concave vers Ox, répondant à AI; 2° une autre branche infinie FV, également concave vers Ox, répondant à IH seulement si $n < 2$, et à IS si $n \geq 2$; 3° lorsque $n < 2$, un arc FD, convexe vers Ox, qui répond à HS, et disparaît quand $n \geq 2$. Enfin, on remarquera que si n variait depuis 2 jusqu'à 1, les points F et F₁, d'abord réunis sur SP avec D, s'écarteraient de SP et tendraient vers A et

A_1 , sur Ox , en même temps que les asymptotes s'inclinaient sur Ox et tendraient à s'y confondre.

Arc. — On a, en désignant par s l'arc AM ,

$$ds = a \sqrt{1 + n^2 - 2n \cos \varphi} . d\varphi ;$$

d'où, en posant $\varphi = \pi - 2\psi$,

$$ds = -2a(1+n) \sqrt{1 - \frac{4n}{(n+1)^2} \sin^2 \psi} . d\psi .$$

On voit, d'après cette dernière expression de ds , que la rectification de la cycloïde dont il s'agit se ramène à celle d'une ellipse dont les demi-axes sont $2a(n+1)$ et $2a(n-1)$. En intégrant depuis $\frac{\pi}{2}$ jusqu'à ψ , qui répondent à $\varphi = 0$ et à φ , il vient, par une notation connue,

$$s = 2a(1+n) \left[E \left(\frac{2\sqrt{n}}{1+n} \right) - E \left(\frac{2\sqrt{n}}{1+n} ; \psi \right) \right] ;$$

et conséquemment l'arc AS est exprimé par

$$2a(1+n) . E \left(\frac{2\sqrt{n}}{1+n} \right) .$$

Segment. — Si l'on désigne par A le segment $OAMM'$, on a

$$dA = a^2(n - \cos \varphi)^2 d\varphi ;$$

et, en intégrant de manière que $\varphi = 0$ donne $A = 0$, il vient

$$A = a^2 \left[\left(n^2 + \frac{1}{2} \right) \varphi - 2n \sin \varphi + \frac{1}{4} \sin 2\varphi \right] ,$$

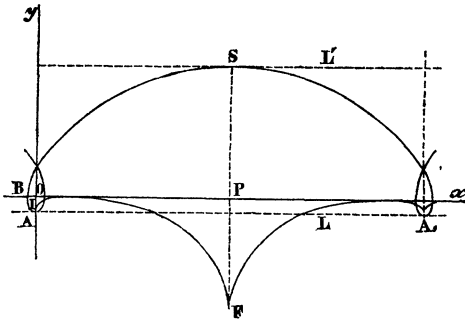
d'où il suit que l'aire $OASA, O_1$ a pour mesure

$$2\pi a^2 \left(n^2 + \frac{1}{2} \right) = 2\pi R^2 + \pi a^2 .$$

II. — *Cycloïdes raccourcies.* — Le point G est hors du cercle C , de sorte que $n < 1$. Toutes celles des équations

précédentes qui ne supposent pas $n > 1$, s'appliquent ; et nous en déduirons brièvement les principaux caractères de ces courbes , qui sont encore comprises entre les parallèles à Ox dont les équations sont

$$y = R \mp a (L \text{ et } L').$$



Soient φ' et φ'' les valeurs de φ , comprises entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, qui rendent nulles y et x , c'est-à-dire qui satisfont aux équations $n - \cos \varphi = 0$ et $n \varphi - \sin \varphi = 0$, et dont la première φ' est moindre que la seconde φ'' , puisque $n - \cos \varphi$ est la dérivée de $n \varphi - \sin \varphi$ (théorème de Rolle).

Lorsque φ croît de 0 à φ' , x décroît de 0 à $-a(\sin \varphi' - n \varphi')$, car $D_{\varphi} x < 0$; y croît de $-(a - R)$ à 0, car $D_{\varphi} y > 0$; et y' décroît de 0 à $-\infty$, car $D_{\varphi} y' < 0$. On a donc l'arc AB touché en A par la droite L, en B par une parallèle à Oy, et concave vers les deux axes.

De $\varphi = \varphi'$ à $\varphi = \pi$, x est d'abord négative jusqu'à $\varphi = \varphi''$, ensuite positive, et toujours croissante, car $D_{\varphi} x > 0$; y croît de 0 à $R + a$, car $D_{\varphi} y > 0$; et y' décroît de $l'\infty$ à 0, car $D_{\varphi} y' < 0$. On a donc l'arc BS qui coupe Oy en D, dont l'ordonnée est $R - a \cos \varphi''$, touche L' en S, et est concave vers Ox. φ continuant de croître jusqu'à 2π , on a $SB_1 A_1$ symétrique de SBA, et la courbe comprend une infinité de parties telles que ASA_1 .

Le rayon de courbure est encore évidemment minimum en A, où sa valeur est $\frac{(a - R)^2}{a}$; et il est maximum en S, où sa valeur est $\frac{(a + R)^2}{a}$, car $D_\varphi \rho$ passe du positif au négatif quand φ franchit la valeur π (c'est le signe — qu'il faut prendre devant l'expression de ρ).

La développée a deux points de rebroussement I et F correspondant à A et S; elle touche l'axe des x en un point correspondant à B, et dont l'abscisse est $x_1 = R\varphi'$, ainsi qu'en un point symétrique de celui-là par rapport à SP; et elle est partout convexe vers Ox.

Enfin, on remarquera que l'expression de A fournit, par exemple, l'aire de OAB + OBC + OCMM', le point M répondant à la valeur que l'on donne à φ .

Note. M. Ch. Forestier, agrégé des sciences mathématiques, professeur au lycée de Brest, a envoyé aussi une très-bonne et instructive solution de cette question. L'insertion ferait double emploi ou interromprait la suite des travaux que nous devons à l'obligeance de M. Dieu, professeur à Dijon, qui vient d'être nommé professeur à la Faculté de Grenoble.

Tm.