

MOURGUE

Note sur la théorie des logarithmes

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 11
(1852), p. 109-112

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1852_1_11__109_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1852, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

NOTE SUR LA THÉORIE DES LOGARITHMES;

PAR M. MOURGUE,

Professeur au lycée de Marseille.

De simples considérations d'arithmétique permettent d'arriver à l'inégalité

$$\log \left(1 + \frac{1}{10^{n+1}} \right) < \frac{1}{9 \cdot 10^n},$$

et d'en déduire une limite de l'erreur commise dans l'emploi de la proportion tabulaire.

Admettons, pour un instant, l'inégalité

$$(1 + \alpha)^m < 1 + m \alpha (1 + \alpha)^m,$$

dans laquelle m désigne un nombre entier, et α un nombre commensurable ou non.

Si, après lui avoir donné la forme

$$x > \frac{(1 + \alpha)^m - 1}{m(1 + \alpha)^m},$$

on pose

$$1 + \alpha = \sqrt[m]{10},$$

il en résulte

$$x > \frac{9}{10m},$$

et, par suite,

$$1 + \frac{9}{10m} < \sqrt[m]{10};$$

d'où l'on déduit, en faisant $m = 9 \cdot 10^n$,

$$1 + \frac{1}{10^{n+1}} < \sqrt[9 \cdot 10^n]{10}.$$

Mais, dans le système décimal dont il s'agit ici, le logarithme de $\sqrt[9 \cdot 10^n]{10}$ est $\frac{1}{9 \cdot 10^n}$. Donc

$$\log \left(1 + \frac{1}{10^{n+1}} \right) < \frac{1}{9 \cdot 10^n}.$$

Cela posé, on a

$$\log(N + h) - \log N = \log \frac{N + h}{N},$$

$$\log(N + 2h) - \log(N + h) = \log \frac{N + 2h}{N + h};$$

d'où

$$\begin{aligned} & \log \frac{N + h}{N} - \log \frac{N + 2h}{N + h} \\ &= \log \frac{(N + h)^2}{N^2 + 2Nh} = \log \left(1 + \frac{h^2}{N^2 + 2Nh} \right). \end{aligned}$$

Pour une même valeur de h , cette dernière quantité diminue quand N augmente, et, pour une même valeur de N , elle diminue avec h .

Soient maintenant $h = \frac{1}{10^2}$ et $N = 10^4$, on aura

$$\log \left(1 + \frac{h^2}{N^2 + 2Nh} \right) < \log \left(1 + \frac{1}{10^{12}} \right) < \frac{1}{9 \cdot 10^{11}}.$$

Ainsi, quand un nombre $N \geq 10\,000$ reçoit des accroissements successifs égaux à $\frac{1}{100}$, il en résulte, pour son logarithme, des accroissements correspondants, dont les valeurs vont en décroissant, et deux de ces valeurs consécutives sont égales entre elles, à moins de $\frac{1}{9 \cdot 10^{11}}$.

Soit i le premier de ces accroissements; le second sera compris entre i et $i - \frac{1}{9 \cdot 10^{11}}$, le troisième entre i et $i - 2 \frac{1}{9 \cdot 10^{11}}$, ..., le centième entre i et $i - 99 \frac{1}{9 \cdot 10^{11}}$.

Donc, si le nombre N croît de 100 centièmes ou 1, la variation Δ de son logarithme sera la somme des cent accroissements précédents, et sera comprise entre $100i$ et $100i - \frac{100 \cdot 99}{2} \cdot \frac{1}{9 \cdot 10^{11}}$, c'est-à-dire que

$$\Delta = 100i - \frac{\theta \cdot 100 \cdot 99}{2 \cdot 9 \cdot 10^{11}},$$

en désignant par θ une quantité comprise entre 0 et 1.

De même, si le nombre N croît de p centièmes, on aura, pour la variation de son logarithme,

$$D = pi - \frac{\theta' p (p - 1)}{2 \cdot 9 \cdot 10^{11}}.$$

On déduit de là

$$D - \Delta \frac{p}{100} = \frac{\theta p \cdot 99 - \theta' p (p - 1)}{2 \cdot 9 \cdot 10^{11}}.$$

Or, pour $p < 100$, le numérateur est inférieur à 10^4 , et le second membre est plus petit que $\frac{1}{18 \cdot 10^7}$ ou $\frac{1}{1,8 \cdot 10^8}$.

Ainsi l'égalité $D = \Delta \frac{P}{100}$, qui n'est autre chose que la proportion usitée, donne pour D une valeur exacte, à moins de $\frac{5}{9}$ d'une unité du huitième ordre. Cette limite est la moitié environ de celle que donne l'algèbre, comme on le voit dans l'intéressant article de M. Serret (p. 31).

Passons maintenant à la démonstration de l'inégalité précédemment admise.

De l'égalité

$$(1 + \alpha)^m = (1 + \alpha)^{m-1} (1 + \alpha),$$

on déduit

$$\begin{array}{rcl} (1 + \alpha)^m & < & (1 + \alpha)^{m-1} + \alpha (1 + \alpha)^m, \\ (1 + \alpha)^{m-1} & < & (1 + \alpha)^{m-2} + \alpha (1 + \alpha)^{m-1}, \\ \vdots & & \vdots \\ 1 + \alpha & < & 1 + \alpha (1 + \alpha)^m; \end{array}$$

d'où, par addition,

$$(1 + \alpha)^m < 1 + m \alpha (1 + \alpha)^m.$$
