

L. GISCLARD

Sur la limite supérieure des racines positives d'une équation

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 11 (1852), p. 107-108

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1852_1_11__107_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1852, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LA LIMITE SUPÉRIEURE DES RACINES POSITIVES D'UNE ÉQUATION;

PAR M. L. GISCLARD,
Professeur au lycée de Toulouse.

THÉOREME. $y = f(x) = 0$ étant une équation du degré m , si $x = x_0$ donne pour $f(x)$ et ses différences, des résultats tous positifs $y_0, \Delta y_0, \Delta^2 y_0, \dots, \Delta^{m-1} y_0$, je dis qu'on aura une limite supérieure des racines positives de l'équation, en prenant

$$x = x_0 + (m - 1).$$

Démonstration. Ce théorème est une conséquence de la formule fondamentale du calcul aux différences finies

$$y_z = f(x_0 + z) = y_0 + \frac{z}{1} \Delta y_0 + \frac{z(z-1)}{1.3} \Delta^2 y_0 + \dots + \frac{z(z-1)\dots[z-(m-1)]}{1.2\dots m} \Delta^m y_0.$$

Remarquons d'abord que les deux membres étant du degré m par rapport à z , cette formule sera vérifiée pour toutes les valeurs de z , puisqu'elle est déjà vérifiée par les valeurs entières. Si donc $y_0, \Delta y_0, \Delta^2 y_0, \dots, \Delta^{m-1} y_0$ sont positifs, il est évident que si l'on prend $z = m - 1$ ou une valeur plus grande, le second membre, et par suite $f(x_0 + z)$ sera positif; car les différents coefficients seront tous positifs. Si l'on prend $z < m - 1$, un des coefficients au moins devenant négatif, on n'est plus sûr que $f(x_0 + z)$ soit positif.

On peut faire voir, du reste facilement, que lorsqu'on fait décroître indéfiniment l'intervalle des substitutions, le théorème précédent conduit à la limite des racines po-

sitives de Newton. En effet, prenons la formule générale

$$f(x_0 + nh) = y_0 + \frac{n}{1} \delta y_0 + \frac{n(n-1)}{1.2} \delta^2 y_0 \\ + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} \delta^3 y_0 + \dots;$$

$\delta y_0, \delta^2 y_0, \delta^3 y_0, \dots$ relatifs à l'intervalle h varieront avec h ; on peut écrire le second membre sous la forme

$$y_0 + nh \cdot \frac{\delta y_0}{h} + \frac{n^2 h^2}{1.2} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \frac{\delta^2 y_0}{h^2} + \frac{n^3 h^3}{1.2.3} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \delta^3 y_0 \\ + \dots + \frac{n^m h^m}{1.2 \dots m} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{m-1}{n}\right) \delta^m y_0.$$

Faisons maintenant décroître h et croître n , mais de manière à ce que nh soit constant; on aura, quand on supposera h infiniment petit,

$$f(x_0 + h) = y_0 + h f'(0) + \frac{h^2}{1.2} f''(0) + \dots + \frac{h^m}{1.2.m} f^m(0),$$

ce qui nous conduit à la limite de Newton.