

E. PROUHET

Solution de l'exercice numérique proposé

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 10
(1851), p. 89-91

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1851_1_10__89_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1851, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOLUTION DE L'EXERCICE NUMÉRIQUE PROPOSÉ

(voir t. IX, p. 368) (*) ;

PAR M. E. PROUHET.

Il s'agit de démontrer que les équations suivantes :

$$1^o \quad 5797x^4 + 4951x^3 + 5892x^2 + 2876x + 6942 = 0 ;$$

$$2^o \quad 3447x^6 + 14560x^5 + 22430x^4 + 25857x^3 + 29193x^2 \\ + 11596x + 5602 = 0 ,$$

n'ont aucune racine réelle.

1. On a, pour toute valeur réelle de x ,

$$x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 > 0 .$$

Il en résulte, à fortiori,

$$x^4 - \frac{4951}{5797}x^3 + \frac{5892}{5797}x^2 - \frac{2876}{5797}x + \frac{6942}{5797} > 0 .$$

Donc la transformée en $-x$ de la première équation, et, par suite, cette équation n'a que des racines imaginaires.

2. $f'(x)$ étant le premier membre de la seconde équation, $f'(-x)$ peut être mise sous l'une de ces deux

(*) Dans la *Connaissance des Temps* pour 1849, page 174, cette solution est donnée à l'aide du théorème de M. Sturm ; ce qui exige de pénibles et longs calculs.

formes :

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \left\{ \begin{aligned} & x^4(3447x^2 - 14560x + 15376) \\ & + x^2(7054x^2 - 25857x + 23696) \\ & + (5497x^2 - 11596x + 5602) = 0, \end{aligned} \right. \\
 (2) \quad & \left\{ \begin{aligned} & (5602 - 11596x + 6001x^2) \\ & + (23192 - 25857x + 7208x^2)x^2 \\ & + (15222 - 14560x + 3447x^2)x^4 = 0. \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

Dans l'équation (1), les racines des deux premiers trinômes sont imaginaires; celles du troisième sont réelles et moindres que 1,5 : on en conclut que $f(-x)$ est positive pour toute valeur de x supérieure à 1,5.

Dans l'équation (2), les racines des deux premiers trinômes sont imaginaires; celles du troisième sont réelles et plus grandes que 1,5 : il en résulte que $f(-x)$ est positive pour toute valeur de x inférieure à 1,5.

Ainsi $f(-x)$ conserve le même signe pour toute valeur réelle de x ; donc ce polynôme n'a que des racines imaginaires, et il en est de même de $f(x)$. C. Q. F. D.

JUSTIFICATION DES CALCULS INDIQUÉS.

Première forme de $f(-x)$.

Premier trinôme : $3447x^2 - 14560x + 15376$.

$$\left(\frac{14560}{2} \right)^2 = (7280)^2 = 52998400$$

$$3447 \cdot 15376 = 53001072$$

Deuxième trinôme : $7054x^2 - 25857x + 23696$.

$$25857^2 = 668584449$$

$$4 \cdot 7054 \cdot 23696 = 668606336$$

Troisième trinôme : $5497x^2 - 11596x + 5602$.

Ce trinôme a une seule racine entre 1 et $+\infty$; 1,5 substitué donne un résultat > 0 .

(91)

Seconde forme de $f(-x)$:

Premier trinôme : $6001x^2 - 11596x + 5602$.

$$\left(\frac{11596}{2}\right)^2 = 5798^2 = 33616804$$

$$5602 \cdot 6001 = 33617602$$

Deuxième trinôme : $23192x^2 - 25857x + 7208x^2$.

$$25857^2 = 668584449$$

$$4 \cdot 23192 \cdot 7208 = 668671744$$

Troisième trinôme : $3447x^2 - 14560x + 15222$.

La somme des deux racines est plus grande que 4 ; ces racines sont donc plus grandes que 1.

$$3447 \cdot 1,5 = 5170,5$$

$$5170,5 - 14560 = -9389,5$$

$$+ 9389,5 \times 1,5 = 14084,55 < 15222 (*)$$