

ANGELO GINOCCHI

Solution générale de la question 206

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 10
(1851), p. 80-85

[<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1851_1_10__80_1>](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1851_1_10__80_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1851, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOLUTION GÉNÉRALE DE LA QUESTION 206

(voir t. VIII, p. 107);

PAR M. ANGELO GINOCCHI,
Avocat à Turin.

Il s'agit de satisfaire, par des nombres rationnels, aux deux équations

$$x^2 + y^2 - 1 = z^2, \quad x^2 - y^2 - 1 = u^2.$$

On a donné une solution de ce problème, tome IX, page 116; mais, comme l'a remarqué M. Terquem, elle n'est que particulière. En effet, dans cette solution, on fait $y = pq$, ce qui donne

$$(z + u)(z - u) = 2p^2q^2,$$

et l'on conclut de là

$$z + u = 2q^2, \quad z - u = p^2,$$

conclusion qui n'est pas nécessaire, tant qu'on ne suppose pas qu'il s'agit seulement de nombres entiers; on peut remarquer aussi que la supposition $p = q^2$ n'est point la seule manière de rendre $4 + 4q^4 + p^4$ un carré, comme on l'admet dans le même article. Je pense donc qu'il est à propos de montrer comment on parvient à la solution complète, car la question n'est pas exempte de quelques difficultés qui pourraient arrêter les commençants.

En retranchant, de la première des équations pro-

posées , la seconde , on obtient

$$2y^2 = z^2 - u^2,$$

et y, z, u doivent être trois nombres rationnels qu'on pourra toujours réduire à trois fractions ayant même dénominateur. Soient $\frac{h}{l}, \frac{k}{l}, \frac{i}{l}$ ces fractions, et g le plus grand diviseur commun aux trois numérateurs h, k, i : faisons $h = gh', k = gk', i = gi'$. Il viendra

$$2h'^2 = k'^2 - i'^2,$$

et h', k', i' , n'ayant pas de facteur commun à tous les trois, seront ainsi, deux à deux, premiers entre eux; car si deux de ces nombres avaient un facteur commun, ce facteur, en vertu de la même équation, diviserait aussi le troisième. De plus, $k'^2 - i'^2$ ou le produit $(k' + i')(k' - i')$ sera un nombre pair; les nombres $k' + i', k' - i'$ sont donc en même temps pairs ou impairs, et comme leur somme est $2k'$ et leur différence $2i'$, ils ne peuvent avoir de diviseur commun que 2, puisque k' et i' sont premiers entre eux; on fera donc

$$k' + i' = 2m, \quad k' - i' = 2n,$$

m et n étant premiers entre eux, et l'on aura

$$h'^2 = 2mn,$$

de sorte que $2mn$, étant pair et carré, sera divisible par 4, et, par suite, l'un des facteurs m, n sera divisible par 2. Soit $n = 2n'$; donc

$$h'^2 = 4mn',$$

et le produit mn' sera un carré : par conséquent, ses facteurs m, n' , étant premiers entre eux, seront aussi des carrés, et l'on fera

$$m = p^2, \quad n' = q^2,$$

d'où

$$h' = 2pq, \quad h' = m + n = p^2 + 2q^2.$$

Si l'on posait $m = 2m'$, on aurait

$$h' = 4m'n;$$

m' et n seraient deux carrés, et, en faisant $n = p^2$, $m' = q^2$, il viendrait également

$$h' = 2pq, \quad k' = p^2 + 2q^2.$$

Il en résulte

$$y = \frac{gh'}{l} = \frac{2gpq}{l}, \quad z = \frac{gk'}{l} = \frac{g(p^2 + 2q^2)}{l},$$

valeurs qui, étant substituées dans l'équation

$$x^2 + y^2 - 1 = z^2,$$

donnent

$$l^2 x^2 = g^2(p^2 + 2q^2)^2 - 4g^2 p^2 q^2 + l^2 = g^2(p^4 + 4q^4) + l^2.$$

Donc le nombre entier $g^2(p^4 + 4q^4) + l^2$ sera un carré. Soit $l + r$ sa racine; on aura

$$g^2(p^4 + 4q^4) = r^2 + 2lr,$$

d'où

$$l = \frac{g^2(p^4 + 4q^4)}{2r} - \frac{1}{2}r,$$

et il faudra que r soit un diviseur de $g^2(p^4 + 4q^4)$ et pair si $g^2(p^4 + 4q^4)$ est pair. Par cette valeur de l , nous avons enfin les formules

$$y = \frac{2gpq}{l} = \frac{4gpqr}{g^2(p^4 + 4q^4) - r^2},$$

$$x = \frac{l+r}{l} = \frac{g^2(p^4 + 4q^4) + r^2}{g^2(p^4 + 4q^4) - r^2},$$

qui fourniront toutes les solutions possibles de la question proposée, pourvu qu'on assigne des valeurs entières à g , p , q , r . qu'on prenne p et q premiers entre eux

(comme m et n), q impair (car des deux nombres m et n l'un est pair, l'autre impair, et q^2 est égal au dernier), et que r soit un diviseur de $g^2(p^4 + 4q^4)$, pair ou impair comme g .

Mais j'ajoute qu'on aura toujours des solutions du problème, en donnant aux mêmes lettres des valeurs *rationnelles quelconques*, et qu'ainsi on pourra, sans diminuer la généralité des formules précédentes, mettre gr à la place de r , ce qui donnera

$$y = \frac{4pqr}{p^4 + 4q^4 - r^2}, \quad x = \frac{p^4 + 4q^4 + r^2}{p^4 + 4q^4 - r^2}.$$

Car

$$(p^4 + 4q^4 + r^2)^2 - (p^4 + 4q^4 - r^2)^2 = 4r^2(p^4 + 4q^4),$$

et, par suite, de ces dernières formules, il résultera

$$x^2 \pm y^2 - 1 = \frac{4r^2(p^4 + 4q^4 \pm 4p^2q^2)}{(p^4 + 4q^4 - r^2)^2} = \frac{4r^2(p^2 \pm 2q^2)^2}{(p^4 + 4q^4 - r^2)^2},$$

qui est toujours un carré, comme le veut l'énoncé du problème.

Il est clair, en même temps, qu'on aura

$$z = \frac{2r(p^2 + 2q^2)}{p^4 + 4q^4 - r^2}, \quad u = \frac{2r(p^2 - 2q^2)}{p^4 + 4q^4 - r^2}.$$

Le problème est ainsi complètement résolu. Si l'on suppose $r = 2q^2$, il vient

$$y = \frac{8q^3}{p^3}, \quad x = \frac{8q^4}{p^4} + 1,$$

d'où l'on tire la solution du Lilavati pour les nombres entiers, en prenant $p = 1$. Les résultats sont, en substance, les mêmes, si l'on suppose $r = p^2$.

Mais en faisant $r = 2pq$, on obtient cette solution en

nombre fractionnaire

$$y = \left(\frac{p^2 + 2q^2}{p^2 - 2q^2} \right)^2 - 1, \quad x = \left(\frac{p^2 + 2q^2}{p^2 - 2q^2} \right)^2,$$

puisque, alors,

$$4pqr = 8p^2q^2 = (p^2 + 2q^2)^2 - (p^2 - 2q^2)^2.$$

Enfin, si l'on fait $r = p^2 - 2q^2$, on trouve

$$p^4 + 4q^4 - r^2 = 4p^2q^2,$$

et, en conséquence,

$$y = \frac{p^2 - 2q^2}{pq}, \quad x = 1 + \frac{(p^2 - 2q^2)^2}{2p^2q^2};$$

d'où, en prenant $p = -\frac{1}{2}$, on tire

$$y = \frac{8q^2 - 1}{2q}, \quad x = 1 + \frac{(8q^2 - 1)^2}{8q^2},$$

solution du Lilavati pour les nombres fractionnaires [c'est par erreur que, dans les *Nouvelles Annales*, tome IX, page 117, on a imprimé $\left(\frac{8q^2 - 1}{8q^2} \right)^2$ au lieu de $\frac{(8q^2 - 1)^2}{8q^2}$].

On peut abrégé cette solution comme il suit. Ayant l'équation

$$u^2 + 2y^2 = z^2,$$

faisons $z = u + t$; nous aurons

$$2y^2 = 2tu + t^2,$$

d'où

$$u = \frac{2y^2 - t^2}{2t},$$

et, par cette valeur, l'équation

$$x^2 - y^2 - 1 = u^2$$

deviendra

$$x^2 = \frac{(2y^2 - t^2)^2}{4t^2} + y^2 + 1 = \frac{4y^4 + t^4 + 4t^2}{4t^2}.$$

On ne voit pas d'abord comment on peut, *en général*, rendre $4y^4 + t^4 + 4t^2$ un carré; mais si l'on fait $t = \frac{p}{n}$, il viendra

$$x^2 = \frac{4n^4y^4 + p^4 + 4n^2p^2}{4n^2p^2}, \quad \text{ou} \quad x^2 = \frac{p^4 + 4q^4 + l^2}{l^2},$$

en posant $l = 2np$, $q = ny$, de sorte qu'on devra rendre $p^4 + 4q^4 + l^2$ un carré, et en appelant $l + r$ sa racine. on aura

$$p^4 + 4q^4 = 2lr + r^2,$$

d'où

$$l = \frac{p^4 + 4q^4 - r^2}{2r},$$

$$y = \frac{q}{n} = \frac{2pq}{l} = \frac{4pqr}{p^4 + 4q^4 - r^2}, \quad x = \frac{l+r}{l} = \frac{p^4 + 4q^4 + r^2}{p^4 + 4q^4 - r^2}.$$