

G.-J. DOSTOR

Théorie des systèmes de quatre points harmoniques

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 10 (1851), p. 73-78

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1851_1_10__73_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1851, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

THÉORIE DES SYSTÈMES DE QUATRE POINTS HARMONIQUES

(voir t. IX, p. 118) ;

PAR M. G.-J. DOSTOR,

Docteur ès sciences mathématiques.

I. *Définitions.* Désignons par A, B, A', B' , quatre points en ligne droite, qui forment un *système harmonique*, et par α, β les milieux des intervalles des points conjugués A et A' , B et B' .

Nous donnerons aux segments AA', BB' le nom de

(*) Nous publierons incessamment une série de *pourquoi* ?

segments conjugués, à AB, A'B' celui de *segments extrêmes*, et enfin à AB' et A'B les noms de *grand* et de *moyen segment*.

Nous représenterons, en outre, par $\frac{a}{a'} = a$, $\frac{b'}{b} = b$ les rapports dans lesquels les distances entre les points conjugués A, A', B' et B se trouvent divisées par les deux autres points, de sorte que $\frac{AB}{A'B} = a$, $\frac{B'A'}{BA'} = b$.

II. *Propriétés des segments conjugués*. Si l'on exprime les quatre segments AB, A'B', AB', A'B en valeur des distances de leurs extrémités au point α , et qu'on substitue les valeurs obtenues

$$\begin{aligned} AB &= A\alpha + B\alpha, & A'B' &= B'\alpha - A'\alpha, \\ A'B &= A'\alpha - B\alpha, & AB' &= A\alpha + B'\alpha \end{aligned}$$

dans l'égalité

$$(1) \quad AB \cdot A'B' = AB' \cdot A'B$$

que donne la proportion harmonique $AB : A'B :: AB' : A'B'$, on obtient la relation

$$(2) \quad \overline{A\alpha}^2 = B\alpha \cdot B'\alpha.$$

De même

$$(3) \quad \overline{B\beta}^2 = A\beta \cdot A'\beta.$$

La multiplication des identités $AA' = AB + A'B$, $BB' = A'B' + A'B$ donne ensuite

$$(4) \quad AA' \cdot BB' = 2 AB \cdot A'B' = 2 AB' \cdot A'B;$$

puis on obtient, en faisant le produit des égalités $AA' = AB + A'B$, $AA' = AB' - A'B'$,

$$(5) \quad \overline{AA'}^2 = AB \cdot AB' - A'B \cdot A'B'.$$

De même

$$(6) \quad \overline{BB'}^2 = B'A \cdot B'A' - BA \cdot BA'.$$

Si l'on ajoute les formules (5) et (6), on trouve, après réductions,

$$(7) \quad \overline{AA'}^2 + \overline{BB'}^2 = (AB + A'B')^2 = (AB' - A'B)^2,$$

d'où l'on tire

$$(8) \quad \overline{AA'}^2 + \overline{BB'}^2 = (AB + A'B')(AB' - A'B).$$

Divisant successivement les équations (5) et (6) par les valeurs (4), on a ensuite

$$(9) \quad 2 \cdot \frac{AA'}{BB'} = \frac{AB'}{A'B'} - \frac{A'B'}{AB'} = \frac{AB}{A'B} - \frac{A'B}{AB},$$

$$(10) \quad 2 \cdot \frac{BB'}{AA'} = \frac{B'A}{BA} - \frac{BA}{B'A} = \frac{B'A'}{BA'} - \frac{BA'}{B'A'}.$$

Si nous combinons, par addition et par soustraction, l'identité $AB \cdot AB' = AB \cdot AB'$ avec la formule (1), nous obtiendrons

$$AB(AB' + A'B') = AB'(AB + A'B),$$

$$AB(AB' - A'B') = AB'(AB - A'B),$$

ou

$$AB(AB' + A'B') = AB' \cdot AA', \quad AB \cdot AA' = AB'(AB - A'B);$$

d'où nous tirons, en divisant convenablement par les valeurs (4),

$$(11) \quad \frac{1}{A'B'} + \frac{1}{AB'} = \frac{2}{BB'}, \quad \frac{2}{BB'} = \frac{1}{A'B} - \frac{1}{AB}.$$

On trouverait, d'une manière analogue,

$$(12) \quad \frac{1}{BA} + \frac{1}{B'A} = \frac{2}{AA'}, \quad \frac{2}{AA'} = \frac{1}{BA'} - \frac{1}{B'A'}.$$

La comparaison des formules (11) et (12) donne

$$(13) \quad \frac{2}{AA'} + \frac{2}{BB'} = \frac{1}{A'B} + \frac{1}{AB'},$$

$$(14) \quad \frac{2}{AA'} - \frac{2}{BB'} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{A'B'}.$$

On trouve ensuite facilement

$$(15) \quad \frac{1}{A'B} - \frac{1}{AB'} = \frac{2}{A'B'} + \left(\frac{2}{AA'} - \frac{2}{BB'} \right),$$

$$(16) \quad \frac{1}{A'B} - \frac{1}{AB'} = \frac{2}{AB} - \left(\frac{2}{AA'} - \frac{2}{BB'} \right),$$

$$(17) \quad \frac{1}{AB} + \frac{1}{A'B'} = \frac{2}{A'B} - \left(\frac{2}{AA'} + \frac{2}{BB'} \right),$$

$$(18) \quad \frac{1}{AB} + \frac{1}{A'B'} = \frac{2}{AB'} + \left(\frac{2}{AA'} + \frac{2}{BB'} \right).$$

En égalant les valeurs (12), de $\frac{2}{AA'}$, on a enfin la relation

$$(19) \quad \frac{1}{A'B} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{A'B'} + \frac{1}{AB'},$$

qui est l'une des formules les plus remarquables des systèmes harmoniques. On peut encore appeler l'attention sur la formule

$$(20) \quad \overline{A\alpha}^2 + \overline{B\beta}^2 = \overline{\alpha\beta}^2,$$

qui se déduit de $B\beta^2 = A\beta \cdot A'\beta$, en y remplaçant $A\beta$ et $A'\beta$ par $\alpha\beta + \alpha A$ et $\alpha\beta - \alpha A'$.

III. *Propriétés des segments non conjugués.* En élevant au carré les deux membres de l'identité $AB = A\beta - B\beta$, et en observant que (3) $\overline{B\beta}^2 = A\beta \cdot A'\beta$, nous aurons

$$\overline{AB}^2 = A\beta (A\beta - 2B\beta + A'\beta).$$

Or

$$\begin{aligned} A\beta - 2B\beta + A'\beta &= (A\beta - B\beta) - (B\beta - A'\beta) \\ &= AB - A'B = A\alpha + B\alpha - A'\alpha + B\alpha = 2B\alpha; \end{aligned}$$

donc

$$(21) \quad \overline{AB}^2 = 2A\beta \cdot B\alpha.$$

Nous obtiendrions de même

$$(22) \quad \overline{A'B'}^2 = 2 A' \beta . B' \alpha ,$$

$$(23) \quad \overline{AB'}^2 = 2 A \beta . B' \alpha ,$$

$$(24) \quad \overline{A'B}^2 = 2 A' \beta . B \alpha .$$

Combinant ces formules entre elles, nous trouvons

$$(25) \quad \overline{AB}^2 : \overline{A'B}^2 = A \beta : A' \beta , \quad \overline{BA'}^2 : \overline{B'A'}^2 = B \alpha : B' \alpha ;$$

$$(26) \quad AB . A'B = 2 B \alpha . B \beta , \quad BA' . B'A' = 2 A' \beta . A' \alpha ;$$

$$(27) \quad AB : A'B = A \beta : B \beta , \quad BA' : B'A' = B \alpha : A' \alpha ;$$

$$(28) \quad AB . A'B : AB' . A'B' :: B \alpha : B' \alpha ,$$

$$(29) \quad AB . AB' : A'B . A'B :: A \beta : A' \beta .$$

IV. *Propriétés des rapports de division des segments conjugués.* Les deux proportions

$$AB : A'B :: a : a' , \quad AB' : A'B' :: a : a'$$

donnent

$$AB + A'B \quad \text{ou} \quad AA' : A'B :: a + a' : a' ,$$

$$AB' - A'B' \quad \text{ou} \quad AA' : A'B' :: a - a' : a ,$$

d'où l'on tire

$$\frac{A'B'}{A'B} = \frac{a + a'}{a - a'} ;$$

donc

$$(30) \quad \frac{a + a'}{a - a'} = \frac{b'}{b} \quad \text{ou} \quad \frac{a + 1}{a - 1} = b , \quad \frac{b + 1}{b - 1} = a .$$

On trouve ensuite facilement

$$(31) \quad \left\{ \begin{array}{l} AB = \frac{a}{a + a'} \cdot AA' = \frac{a}{a + 1} \cdot AA' , \\ A'B = \frac{a'}{a + a'} \cdot AA' = \frac{1}{a + 1} \cdot AA' , \end{array} \right.$$

$$(32) \quad \left\{ \begin{array}{l} AB' = \frac{a}{a - a'} \cdot AA' = \frac{a}{a - 1} \cdot AA' , \\ A'B' = \frac{a'}{a - a'} \cdot AA' = \frac{1}{a - 1} \cdot AA' . \end{array} \right.$$

La combinaison de ces valeurs donne encore

$$(33) \quad AB : A'B' :: \left(\frac{a}{a'} : \frac{b'}{b} \right) : 1 :: a(a - a') : a'(a + a'),$$

$$(34) \quad AB' : A'B :: \left(\frac{a}{a'} : \frac{b'}{b} \right) : 1 :: a(a + a') : a'(a - a'),$$

$$(35) \quad AA' : BB' :: \frac{a}{a'} + 1 : \frac{b'}{b} + 1 :: a^2 - a'^2 : 2aa' :: 2bb' : b'^2 - b^2.$$

V. *Relations entre les distances d'un point P de la droite ABA'B' aux points harmoniques.* En exprimant les segments AB, A'B', AB', A'B en fonction des distances du point P aux points A, B, A', B', et en substituant les valeurs dans la relation (1), on obtient la formule

$$(36) \quad (PA + PA')(PB + PB') = 2(PA - PA' + PB \cdot PB').$$

A l'aide de ce qui précède, on trouve aussi facilement que

$$(37) \quad PB \cdot PB' \cdot AA' = \overline{PA'}^2 \cdot A\beta - \overline{PA}^2 \cdot A'\beta (*).$$